第一篇

空间飞行器轨道动力学

第一章　绪　论

1.1　从火箭到导弹和人造卫星

火药、指南针、印刷术和造纸术是我国古代对于科学技术的四项重大贡献，其中火药的发明又给火箭的诞生奠定了物质基础。唐朝孙思邈(581 ~ 682年)著《丹经》，就已给出了火药的配方。火药的出现是化学能转化为机械能，进而转化为动力的重大突破，使火箭发动机的问世有了真实的可能。

不同的学者对我国火箭的真正发明年代有不同的推断，比较可靠的，可认为是在北宋开宝三年(公元970年)：冯继升向朝廷进贡火箭法，并进行试验和受到赏赐。可见我国的火箭初创于10世纪后半期。这时的火箭就是古代的弓箭之箭，其上缚一类似现在儿童玩放的"起花"(又称"穿天猴")，靠火箭反作用飞行。

13世纪中叶，火药由我国传入了信奉伊斯兰教的中亚，再传入了欧洲。直到19世纪，火箭与火炮一直是并驾齐驱，互相竞争。但到19世纪末，火炮上出现了两大改革：以硝化纤维素为基础的新型火药和膛线炮管，大大提高了性能，竞争优势倒向了火炮。

在火箭的发展处于低潮期间，各国科学家对火箭技术的研究和试验却一直在进行着，到了20世纪初，出现了两位对火箭技术做出巨大贡献的人。一位是俄国的齐奥尔科夫斯基(Циолковский.K.E)，他于1903年发表了《利用火箭探测宇宙》一文，还提出了使用液体燃料(如液氮和液氧)实现星际航行的可能性，并阐述了火箭飞行器的运动规律，提出了多级火箭的概念。另一位是美国的戈达德(R.H.Goddard)，1919年他提出了"达到极高高度的一种方法"，利用固体推进剂制作了火箭，试图射入太空。1926年他又设计并发射了以液氧和汽油为推进剂的火箭，随后也提出了多级火箭的理论，企图射到月球。

到20世纪30年代，液体及固体火箭推进剂、高温材料、电子和导航技术都取得了很大的进展，给近代火箭和导弹的出现创造了物质基础，火箭武器又重新有了活力。导弹是一种能够控制的火箭武器，它的出现是在第二次世界大战的末期，希特勒企图凭借一两种新式武器挽救其灭亡的命运，并在原子弹和导弹之间选择了导弹这一"秘密武器"。第二次世界大战之后，苏美两国都争先发展自己的导弹和空间技术，投入很大的人力和物力。1957年10月4日，苏联首先把人类第一颗人造卫星送入了轨道，成为航天纪元的开端。1961年4月12日苏联又以"东方一号"将宇航员加加林送入空间，实现了人类遨游太空的梦想。苏联还是第一个向月球发射探测器(1959年1月3日)和在月球着陆(1959年9月12日)的国家。美国由于其技术政策及科学管理上的错误，在空间技术起步阶段落后于苏联。他们总结了失误教训后，终于在1958年2月1日发射了第一颗卫星，并且于1969年7月16日将人送上了月球。此后，一共有六艘"阿波罗"飞船登月，16人次将足迹留在月球表面，这是迄今为止人类最壮观的空间飞行活动。在完成上述竞争之后，美国着力研究第一代多次使用的航天器——航天飞机，并于1981年4月12日首次飞行成功。苏联在美国致力于登月

飞行和航天飞机研制的期间,将力量重点投入到空间站的研究中,并于1971年4月19日把第一座空间站送入轨道,这就是第一代空间站"礼炮一号"。截止目前苏联已发展了三代空间站,第三代空间站"和平号"积累了大量载人飞行的经验,在运行了15年后,于2001年3月23日坠入南太平洋。与此同时,苏联也继美国之后研制成功了自己的航天飞机"暴风雪号",并且把目前最大的运载器"能源号"投入使用。美国本来也有空间站计划,在1973年5月4日步苏联之后,曾将他们的空间站"天空实验室"发射入轨,后因航天飞机屡屡拖期,后续计划不得不变更,该空间站于1979年7月11日坠毁。1986年"挑战者号"航天飞机失事之后,由于后来的国际政治、军事、经济格局的变化,美国除了继续研制第2代航天飞机外,也开始参加了通过国际合作发展永久性载人空间站的工作。1998年11月20日国际空间站(ISS)完成了第一次的发射,计划到2005年全部完成。

我国在古代对于火箭技术的贡献是巨大的,只是由于一千余年的封建社会和一百余年的半封建半殖民地社会的桎梏,使得我国的科学技术落后了。解放后,我们急起直追,科学技术有了极大的发展,1970年4月24日成功地发射了"东方红一号"人造地球卫星,是继苏美法日之后第五个独立发射卫星的国家。1975年11月26日我国发射了第一颗返回式人造卫星,并于同年12月2日顺利回收,成为世界上第三个掌握了回收技术的国家。我国发射卫星的成功率是第一流的,价格远低于国外,极具竞争能力。1992年1月,正式启动了我国的载人飞船研制计划,且于1999年11月20日、2001年1月10日、2002年3月15日、2002年12月30日成功发射并回收了"神舟一号"、"神舟二号"、"神舟三号"、"神舟四号"实验飞船。登月和深空探测计划也开始实施。

1.2　常用数据

地球的有关数据

引力常数	$\mu_{\oplus} = 3.986 \times 10^5\ \mathrm{km^3/s^2}$
平均半径	$R_{\oplus} = 6\,378\ \mathrm{km}$
轨道半径	$r_{\oplus} = 1.496 \times 10^8\ \mathrm{km}$(等于1个天文单位(A U))
轨道速度	$v_{\oplus} = 29.78\ \mathrm{km/s}$

月球的有关数据

引力常数	$\mu_{☾} = 4.887 \times 10^3\ \mathrm{km^3/s^2}$
平均半径	$R_{☾} = 1\,738\ \mathrm{km}$
轨道半径	$r_{☾} = 3.844 \times 10^5\ \mathrm{km}$
轨道偏心率	$e_{☾} = 0.054\,9$
轨道速度	$v_{☾} = 1.02\ \mathrm{km/s}$
相对地球的影响球半径	$\rho = 66.1 \times 10^3\ \mathrm{km}$

太阳的有关数据

引力常数	$\mu_{\odot} = 1.327 \times 10^{11}\ \mathrm{km^3/s^2}$
平均半径	$R_{\odot} = 6.98 \times 10^5\ \mathrm{km}$

太阳系行星的有关数据详见表1.1。

表 1.1　太阳系行星的有关数据

星球	平均轨道半径/10^6 km	偏心率（e）	质量比（行星/太阳）	影响球半径/10^5 km	引力常数/($km^3 \cdot s^{-2}$)	赤道与轨道夹角	轨道与黄道夹角	平均轨道速度/($km \cdot s^{-1}$)	轨道的恒星周期/a	与地球的会合周期/d	赤道平均直径/10^4 km	大气边界高度/km	自地球过渡的时间/d
水星	57.91	0.205 63	$0.001\ 64 \times 10^{-4}$	1.12	$(2.16 \sim 2.19) \times 10^4$	0°	7°	47.83	0.241	115.88	0.481	—	105.5
金星	108.21	0.006 79	$0.024\ 5 \times 10^{-4}$	6.16	3.253×10^5	178°	3°23′	34.99	0.615	583.92	1.21	120	146.1
地球	149.60	0.016 72	$0.030\ 4 \times 10^{-4}$	9.29	3.986×10^5	23°27′	—	29.76	1.0	—	1.274 2	100	—
火星	227.94	0.093 38	$0.003\ 24 \times 10^{-4}$	5.78	4.29×10^4	24°48′	1°51′	24.11	1.881	779.94	0.678	100	258.9
木星	778.34	0.048 45	9.55×10^{-4}	482	1.268×10^8	3°6′	1°18′	13.05	11.862	398.88	13.92	400	997.6
土星	1 427.0	0.055 69	2.86×10^{-4}	545	3.799×10^7	26°45′	2°29′	9.64	29.458	378.09	11.48	500	2 209.2
天王星	2 871.0	0.047 24	0.436×10^{-4}	519	5.798×10^6	98°	0°46′	6.80	84.015	369.66	5.34	500	5 428.9
海王星	4 498.6	0.008 58	0.518×10^{-4}	868	6.977×10^6	29°	1°46′	5.43	164.8	367.49	4.97	400	11 183.6
冥王星	5 912.0	0.253 44	$0.002\ 5 \times 10^{-4}$	341	$3 \sim 3.7 \times 10^5$		17°8′	4.8	247.69	366.74	0.55	—	16 654.7

第二章 空间飞行器的入轨

空间飞行器的入轨,就是通过运载火箭的飞行,使空间飞行器在预定的时刻,以给定的速度、给定的方向、给定的位置进入轨道。这样,空间飞行器就会在预先规定的轨道上运行,完成各种指定的任务。

2.1 运载火箭的运动方程式

2.1.1 常用坐标系

计算运载火箭的飞行轨迹,可以在不同的坐标系进行,最方便的是**发射坐标系** $O_cX_cY_cZ_c$。其坐标原点为发射点 O_c,X_c 轴水平指向发射方向(一般指东或偏东方向),Y_c 轴与重力方向相反,Z_c 轴与 X_c、Y_c 轴构成右旋坐标系(图 2.1 示出运载火箭的平面运动,即在 $O_cX_cY_c$ 平面中运动的情况)。然而,空气动力却在**速度(轨道)坐标系** $OXYZ$ 中计算最为方便,其原点 O 在运载火箭质心,X 轴与速度方向重合,Y 轴在飞行器纵向对称平面内朝上,Z 与前两轴共同构成右旋坐标系。常用的坐标系还有**飞行器固联坐标系** $OX_1Y_1Z_1$,其原点也取在飞行器质心,X_1 轴与飞行器纵轴重合,Y_1 轴在飞行器纵向(或对称)平面内,指向上方,Z_1 轴与前两轴构成右旋坐标系。最后引入的坐标系是**平移(陀螺)坐标系** $OX_gY_gZ_g$,它的原点在质心,三个轴一直保持与发射坐标系在发射瞬间对应轴相平行。值得提醒的是:由于地球的旋转,发射坐标系 $O_cX_cY_cZ_c$ 是随地球旋转而变动的。图中为了区别,将发射时刻的坐标系以 $Y_c(t_0)$ 和 $X_c(t_0)$ 表示。

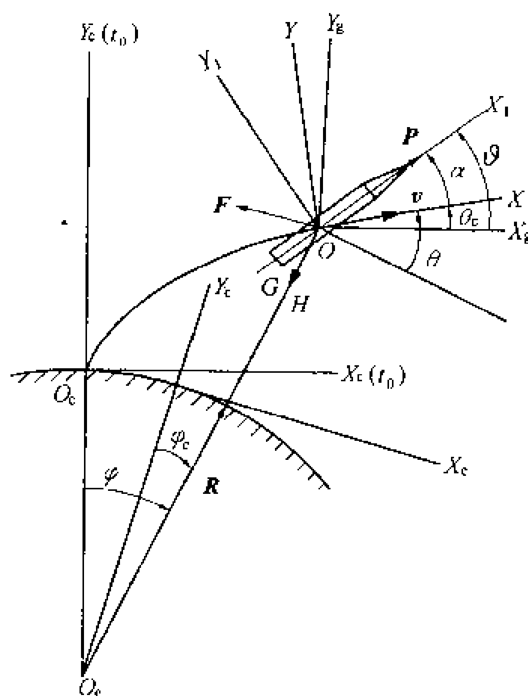


图 2.1 各坐标系

非平面运动的情况,上述坐标系间的关系如图 2.2(a) ~ 2.2(c)。平移坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 到飞行器固联坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 是经过三次转动得到的,即先以角速度 $\dot{\psi}$ 绕 OY_g 转过 ψ 角,得 $OX'Y_gZ'$ 系;再绕 OZ' 以角速度 $\dot{\vartheta}$ 转角 ϑ 得 $OX_1Y'Z'$ 系;最后以角速度 $\dot{\gamma}$ 绕 OX_1 转 γ 角,得飞行器固联坐标系 $OX_1Y_1Z_1$。由 $OX_gY_gZ_g$ 平移系到 $OXYZ$ 速度坐标系也是经过三次旋转得到的,旋转的顺序同前,见图 2.2(b)。

速度坐标系 $OXYZ$ 与飞行器固联坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 之间的关系,以攻角 α 和侧滑角 β 来

描述(图 2.2(c))。由图 2.2(c) 可见，侧滑角 β 是速度与飞行器纵平面 OX_1Y_1 间的夹角，而攻角 α 是速度在纵平面上投影与纵轴 OX_1 间的夹角。各角的关系如图 2.2 所示，运载火箭在 $O_cX_cY_c$ 中的平面运动时，其侧滑角 β，倾斜角 γ_c 和横滚角 γ 均为零，是运动的最简单情况。考虑到地球的曲率变化，其水平线随着空间飞行器位移的改变，将逐渐改变其倾斜程度，以变化后的水平线为基准的轨道倾角将以 θ 表示(图 2.1)。

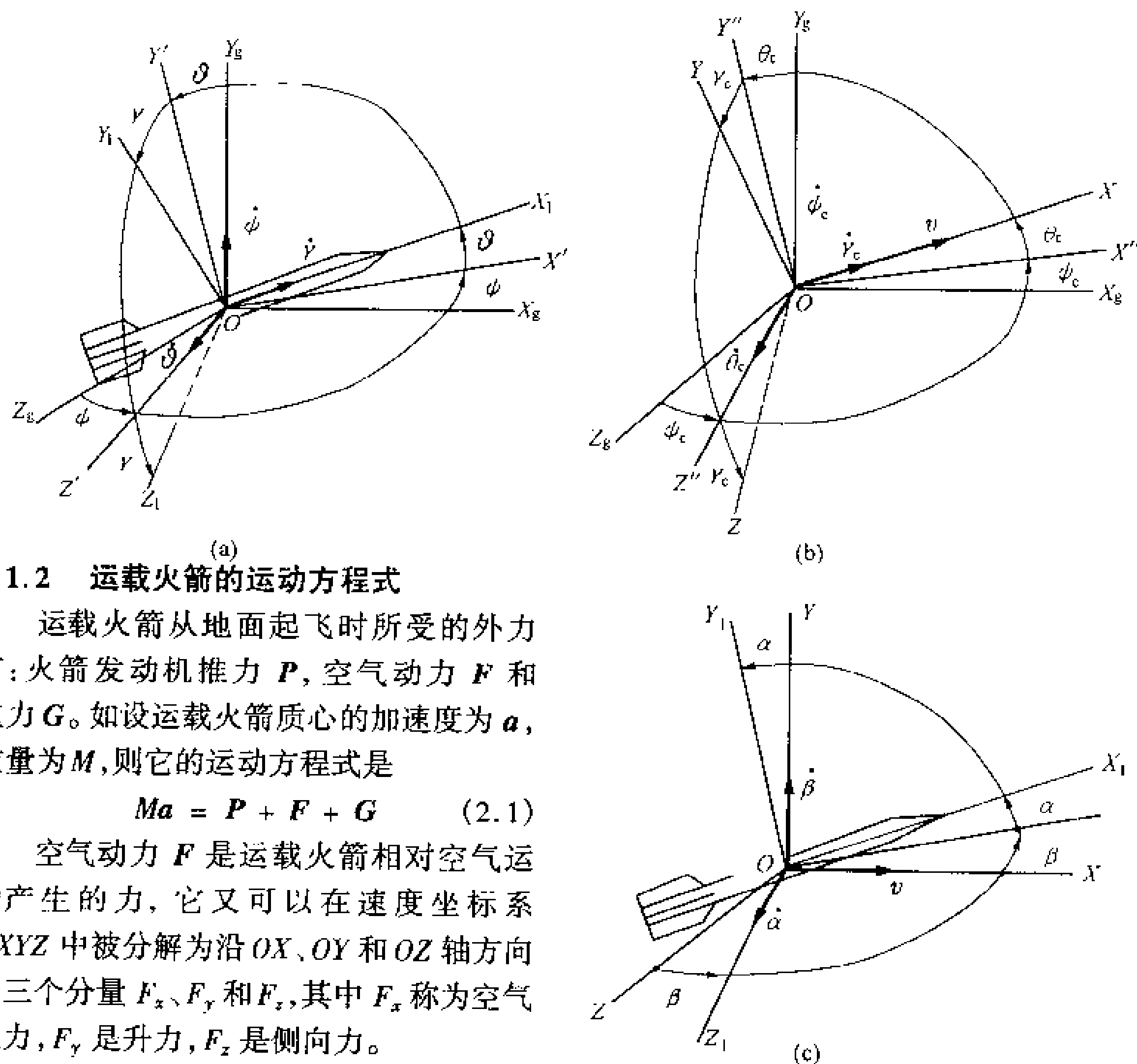


图 2.2　坐标变换

ψ— 偏航角；ϑ— 俯仰角；γ— 横滚角；ψ_c— 轨道(弹道)偏角；θ_c— 轨道(弹道)倾角；γ_c— 倾斜角

2.1.2　运载火箭的运动方程式

运载火箭从地面起飞时所受的外力有：火箭发动机推力 $\boldsymbol{P}$，空气动力 $\boldsymbol{F}$ 和重力 $\boldsymbol{G}$。如设运载火箭质心的加速度为 $\boldsymbol{a}$，质量为 M，则它的运动方程式是

$$M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} \tag{2.1}$$

空气动力 $\boldsymbol{F}$ 是运载火箭相对空气运动产生的力，它又可以在速度坐标系 $OXYZ$ 中被分解为沿 OX、OY 和 OZ 轴方向的三个分量 F_x、F_y 和 F_z，其中 F_x 称为空气阻力，F_y 是升力，F_z 是侧向力。

当只考虑运载火箭纵向平面中的运动时，式(2.1) 可以写成分量形式，即沿 OX 和 OY 方向的力平衡方程式或动力学方程式，以及垂直高度 H 的运动学关系，即

$$\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= P\cos\alpha - F_x - Mg\sin\theta \\ Mv\frac{\mathrm{d}\theta_c}{\mathrm{d}t} &= P\sin\alpha + F_y - Mg\cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= v\sin\theta \end{aligned} \tag{2.2}$$

因在 $OXYZ$ 坐标系中速度是沿着 OX 轴的，所以有 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$（$\boldsymbol{i}$ 是 OX 轴正向单位矢量），对其求导可得运载火箭加速度，即

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} \tag{2.3}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}$ 可参考附录 5，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{i}}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}$$

可见单位矢量的时间导数，是该矢量相对惯性空间的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与其自身的叉乘积。

把上式代入式(2.3)，并考虑到 $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\theta_c}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$，得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + v\frac{\mathrm{d}\theta_c}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} \tag{2.4}$$

其中，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是 OY 和 OZ 轴的正向单位矢量，由式(2.4)可见运载火箭沿 OX 和 OY 方向的加速度分量，分别是 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 和 $v\frac{\mathrm{d}\theta_c}{\mathrm{d}t}$，这就是式(2.2)左侧的由来。

2.2 导引规律的选择

式(2.2)第一式，表示运载火箭沿轨道的加速性能，第二式描述其轨道转弯的特性。火箭起飞时，由于 $\theta_c = \theta = 90°$，$\alpha = 0$，因而升力 F_y 也是零，第二式右侧为零，欲使运载火箭转弯，只能借助改变 α 角的数值。然而，当火箭转弯之后（如图 2.1），θ 不再为 90°，重力 Mg 就成为其继续转弯的驱动力。

我们知道，当 $\alpha = 0$ 时，火箭的空气动力只有阻力一项，当 $\alpha \neq 0$ 时，还要出现升力 F_y，且阻力 F_x 随 α 的增加而增大。人们总是希望阻力小些，以便节省火箭的燃料，怎样设计 α 角的变化规律和控制倾角 θ 的变化，以达到最优地将运载火箭送入卫星轨道就是一个十分重要的问题了。

2.2.1 运载火箭的初始转弯段

由于火箭上升高度有限，可以认为 $g = g_0$（g_0—— 海平面的重力加速度），当火箭以零攻角垂直飞行 10 ~ 15 s后，令攻角 α 产生一个短时间的变化使火箭转弯。通常选择的变化规律是

$$\alpha(t) = \alpha_m\sin^2\frac{\pi(t - t_1)}{(t - t_1) + k(t_2 - t)} \tag{2.5}$$

其中，t_1 和 t_2 分别是攻角改变的初始时刻和结束时刻，α_m 是攻角变化的极小值（为负），而

$$k = \frac{t_m - t_1}{t_2 - t_m}$$

是达到攻角极小值 α_m 时的时间 t_m 与 t_1 和 t_2 差值之比，通常取 $k = 1/4$，α 随时间的变化规律如图 2.3 所示。

α 角的变化，除使运载火箭转弯外，θ 角也逐渐变得小于 90°，其值由式(2.2)计算得到。

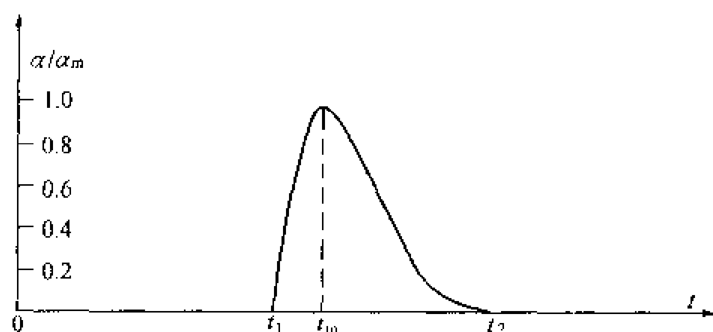


图 2.3　攻角的变化曲线

2.2.2　运载火箭的继续转弯段

经过前一阶段的初始转弯之后，速度约达到 $Ma=0.8$左右，高度为数千米，仍处在稠密大气层之中。通常都以很小的攻角，或零攻角继续飞行，以减小阻力损失，同时也可降低对控制机构的要求和对结构强度的影响。此时，火箭的转弯主要靠重力来实现，故又称此段为重力转弯段。

飞出稠密大气层后，攻角可根据最小能量原则进行优化，也可继续保持为零攻角的重力转弯飞行。

由于运动方程式是非线性和时变的，准确求解火箭的轨迹只能借助于计算机，然而为了能获得解析解以便有清晰的概念，下面把运动方程式简化。首先将空气动力略去，再假设重力为常值平行场，并略去地球自转，这时式(2.2) 成为($\theta=\theta_c$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=\frac{P}{Mg}-\sin\theta\\ \frac{v}{g}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}&=-\cos\theta\end{aligned}\tag{2.6}$$

这是非线性时变方程式，当 P/Mg 为常值时可求得解析解。此时将要求推力随火箭质量的变小而成比例地减小，这在实际中是可以实现的。令

$$z=\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\tag{2.7}$$

则有

$$z^2=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},\quad \sin\theta=\frac{1-z^2}{1+z^2}\tag{2.8}$$

由式(2.7) 还可以求得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{1+\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\tag{2.9}$$

把式(2.7) ~ 式(2.9) 代入式(2.6)，并设 $P/Mg=n$，得

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = n - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$
$$\frac{v}{g}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z \tag{2.10}$$

从上两式消去 t,得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = n\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

积分后,有

$$\ln v = \ln z^n + \ln\frac{1 + z^2}{z} + \ln C$$

或

$$v = Cz^{n-1}(1 + z^2) \tag{2.11}$$

其中积分常数为

$$C = \frac{v(0)}{z(0)^{n-1}(1 + z^2(0))} \tag{2.12}$$

把式(2.11)代入式(2.10),积分后得

$$t = \frac{C}{g}\int_{z(0)}^{z} z^{n-2}(1 + z^2)\mathrm{d}z = \frac{C}{g}z^{n-1}\left(\frac{1}{n - 1} + \frac{z^2}{n + 1}\right)\Bigg|_{z_0}^{z} \tag{2.13}$$

应用式(2.11) ~ 式(2.13)可求得重力转弯时的解。做法是,先根据初始的 $\theta(0)$ 由式(2.7)求得 $z(0)$,再与 $v(0)$ 一同从式(2.12)计算 C,此后每给出一个轨道倾角 θ,即可由式(2.7)、式(2.11)、式(2.13)算出对应的 z, v 和 t。至于运载飞行器的轨道坐标值,可以用

$$\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}t} = v\sin\theta, \frac{\mathrm{d}x_c}{\mathrm{d}t} = v\cos\theta \tag{2.14}$$

计算。

对于非平行重力场和地球有自转的情况,计算方法相同,只是繁杂得多。

由上述分析可见,一旦确定了初始条件($v(0)$、$\theta(0)$、$y_c(0)$ 和 $x_c(0)$),重力转弯段的轨道便惟一地被确定了下来,而要在规定的高度 H^*,使速度达到规定值 v^* 和确定的方向 θ^*,可以调节的只有推力 P(或 n)及初始条件 $\theta(0)$ 和 $y_c(0)$ 等。然而,重力转弯段的初始条件是初始转弯段的最终结果,换言之,其他参数确定后,只有惟一的 $\alpha_m = \alpha_m^*$ 式(2.5)能使运载飞行器最终高度 H_k、末速 v_k 和终点轨道倾角 θ_k 分别达到要求值 H^*、v^* 和 θ^*。当 $\alpha_m < \alpha_m^*$ 时(注意,$\alpha < 0$),轨道比规定的低,且有 $H_k < H^*$、$v_k > v^*$ 和 $\theta_k < \theta^*$;反之,如果 $\alpha_m > \alpha_m^*$,轨道较高,而且 $H_k > H^*$、$v_k < v^*$ 和 $\theta_k > \theta^*$(图2.4)。然而,即使在 $\alpha_m \neq \alpha_m^*$ 时,也可达到规定的高度 H^*,只需对运载飞行器施加控制力矩,使 α 角不再为零。对于 $\alpha_m < \alpha_m^*$,使 α 为大于零的数值($\alpha > 0$);对于 $\alpha_m > \alpha_m^*$,应使 α 小于零($\alpha < 0$)(图2.5)。

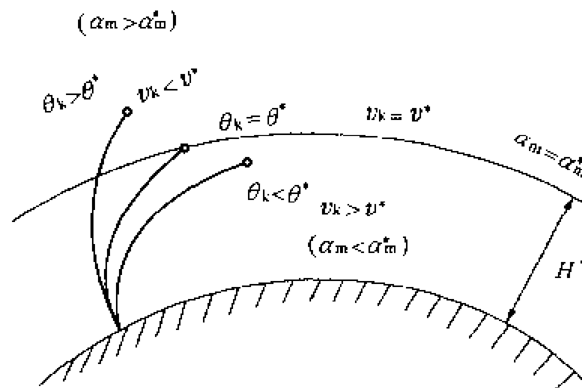


图 2.4　不同的入轨状态

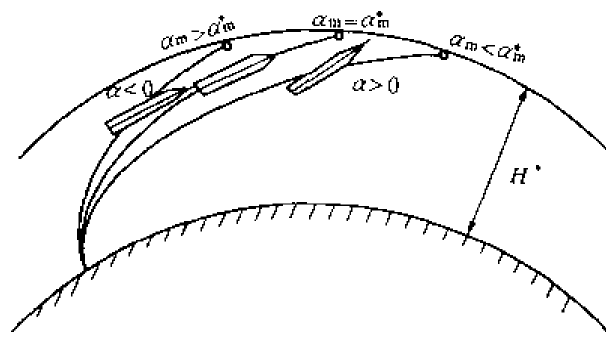


图 2.5　控制攻角的效果

第三章　空间飞行器的轨道

本章研究两体问题和中心引力场的运动问题，也就是忽略其他天体的作用，只研究某一影响最大的星球对空间飞行器的影响（如地球对于人造地球卫星）。多个星体同时作用于空间飞行器的运动规律（n 体问题），目前尚未找到一般通用解，只能依靠数值计算，其中限制性三体问题将在后面章节中研究。

3.1　两体问题

如果将惯性空间某两星体孤立地进行研究，如地球和月球、太阳和某颗行星或某些双星那样，就是本节所研究的问题。

设 $OXYZ$ 是惯性参考坐标系，把其中的两个物体视为质点，质量分别为 m_1 和 m_2，构成两体系统。系统的质心为 C，它位于质点 m_1 相对于 m_2 的距离矢量 $\boldsymbol{r}$ 上的某点。若坐标系原点到 m_2，m_1 和质心 C 的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_c$（图 3.1），则根据系统质心的特性，有

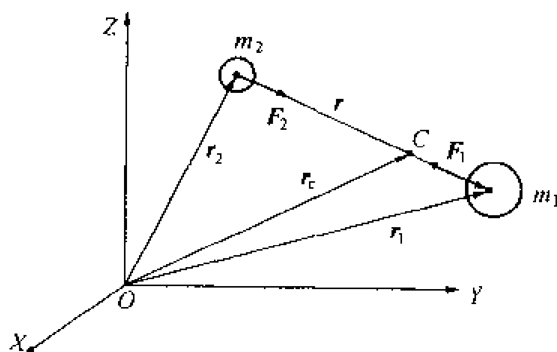


图 3.1　两体系统模型

$$m_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c) + m_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c) = \boldsymbol{0} \tag{3.1}$$

利用几何关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

依次从式(3.1) 消去 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_1$，有

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \tag{3.2a}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \tag{3.2b}$$

因而 m_1 和 m_2 的加速度是

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \ddot{\boldsymbol{r}}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{3.3a}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \ddot{\boldsymbol{r}}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{3.3b}$$

据牛顿第二定理，作用在 m_1 和 m_2 上的力应为

$$\boldsymbol{F}_1 = m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1, \boldsymbol{F}_2 = m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{3.4}$$

对于两体问题，作用在 m_1 和 m_2 上的力只有万有引力，它们大小相等方向相反，即

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1 = Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3.5}$$

式中 G 为万有引力常数，把式(3.3) 两式代入式(3.4)，再利用式(3.5) 可以得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_c(m_1 + m_2) = \boldsymbol{0}$$

这只有在

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{0} \quad 或 \quad \dot{\boldsymbol{r}}_c = \mathbf{const} \tag{3.6}$$

时才能成立。因此，两体运动中，系统质心不做加速运动，或者说，惯性空间两体相互作用的结果，其系统质心速度保持不变，要么**等速直线运动**，要么**静止不动**。

考虑到式(3.6)，把式(3.3a) 代入式(3.5)，还可得到

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + G(m_1 + m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \boldsymbol{0}$$

如令

$$\mu = G(m_1 + m_2) \tag{3.7}$$

则前式成为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{3.8}$$

该式即为两体问题中的基本运动方程式，通过对它分析，可以得到许多两体运动的特点。

设 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$，为 m_1 单位质量相对 m_2 的动量矩(或角动量)。对 $\boldsymbol{h}$ 求导，则有

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{3.9}$$

以式(3.8) 代入，消去 $\ddot{\boldsymbol{r}}$，并考虑到 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$，$\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$，可以得到

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{h} = \mathbf{const} \tag{3.10}$$

式(3.10) 表示 m_1 相对 m_2 的**动量矩是守恒的**，包括它的方向和大小都是守恒的。由于 m_1 相对于 m_2 的速度与 m_2 相对 m_1 的速度大小相等方向相反，所以 $\boldsymbol{h}$ 也表示 m_2 相对于 m_1 的单位质量的动量矩(角动量)，下面将统一称为动量矩(或角动量)。由 $\boldsymbol{h}$ 的定义可知，$\boldsymbol{h}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$，而 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 构成 m_1 和 m_2 相对运动轨道的空间平面，$\boldsymbol{h}$ 守恒，表明这个平面在惯性空间是保持方向不变的，说明 m_1 和 m_2 的相对运动是不变平面中的运动。

m_1 和 m_2 的动能之和是

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_2$$

式(3.2a) 和式(3.2b) 对时间求导后，代入上式，经整理得

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_c \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_c + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.11}$$

前者是系统质心 C 的平动动能，后者是两星体绕质心 C 的转动动能，所以两体系统的动能是上述平动和转动动能之和。

下面再分析两星体相对运动的轨迹，为此以 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ 右叉乘式(3.8)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \times \boldsymbol{h} + \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \tag{3.12}$$

对其中第二项应用 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$，改造得

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - \dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) - \dot{\boldsymbol{r}}r^2 =$$

$$r r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - \dot{r} r^2 = - r^3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

把上式代回式(3.12),考虑到 $\boldsymbol{h}$ = const,积分后得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{h} = \mu\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \boldsymbol{e}\right) \tag{3.13}$$

其中,$\boldsymbol{e}$ 是积分常矢,又称偏心矢量。若以 $\boldsymbol{r}$ 点乘式(3.13)得

$$\boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{h}\right) = \mu(r + re\cos\theta)$$

其中,θ 是 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 之间夹角,而应用 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$,上式还可改造成为

$$h^2 = \mu(r + re\cos\theta)$$

或

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos\theta} \tag{3.14}$$

而以 $\boldsymbol{h}$ 点乘式(3.13),有

$$\boldsymbol{h} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{h}\right) = \mu\left(\boldsymbol{h} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{e}\right)$$

考虑到 $\boldsymbol{h}$ 与速度$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 和矢径 $\boldsymbol{r}$ 是垂直的,上式左侧和右侧第一项必为零,因而有

$$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{e} = 0 \tag{3.15}$$

此式说明偏心矢量 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 是垂直的,换言之 $\boldsymbol{e}$ 位于 m_1 和 m_2 两者的运动平面之中,其方向和大小保持不变,为无因次量。

分析式(3.14),令 $\theta = 0$,得知对应的 $r = r_{\min}$,m_1 与 m_2 相距最近,此时 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同方向,可见 θ 也是自最小相对矢径处开始计算,故称真近角;又知当 $e = 0$ 时,该式描述一圆周运动,当 e 为其他数值时,对应的运动轨迹如表 3.1 所示。

表 3.1 轨迹形状

e 的数值	轨迹形状
0	圆
$0 < e < 1$	椭 圆
$e = 1$	抛物线
$e > 1$	双曲线

图 3.2(a) 和图 3.2(b) 分别表示 $e = 0.707$ 和 $e = 0$,质心 C 静止不动的两体系统在惯性空间的运动情况。图中 1,2,… 和 1′,2′,… 分别是 $t_1, t_2, \cdots$ 瞬间 m_1 和 m_2 星体的位置。$\overline{1'1}, \overline{2'2}, \cdots$ 连线分别是该瞬间 m_1 相对 m_2 的矢径 $\boldsymbol{r}$(图 3.1)。根据式(3.14),当 $e = 0.707$ 时,其长度按椭圆规律变化(图 3.2(a)),而 C 点将该矢径分割成与 m_1 和 m_2 成反比的线段;当 $e = 0$ 时,$\boldsymbol{r}$ 的模是固定值(图 3.2(b))。由图 3.2 还可以看出,相对运动为椭圆或圆时,两物体在惯性空间的轨迹亦为同类曲线。

3.2 中心引力场中的运动

3.2.1 一般理论

假如在两体运动的系统中,$m_2 >> m_1$,可认为重心 C 与 m_2 重合,m_1 对于 m_2 的相对

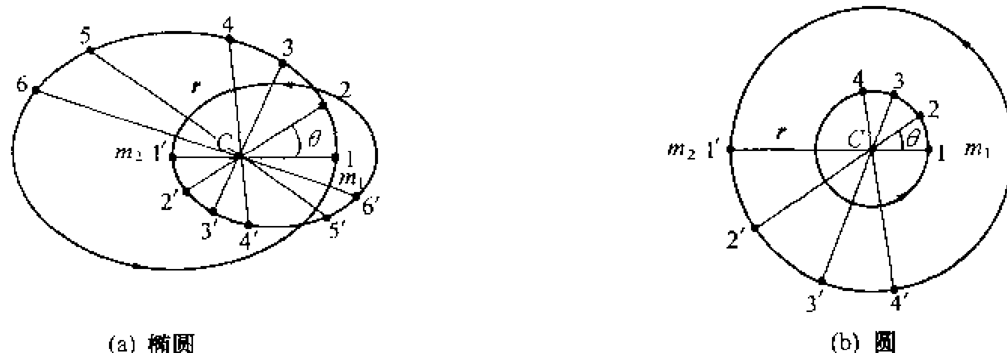


图 3.2　轨迹为椭圆和圆的两体运动

运动，便成为绕中心引力体的运动，这正是人造空间飞行器通常所遇到的情况。此时，略去式(3.7)中 m_1，有 $\mu = Gm_2$ 和 $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_c$(图 3.3)。由 3.1 节求得的一般性规律仍然成立，基本微分方程仍如式(3.8)，即

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{3.16}$$

相对运动的轨迹成为绝对运动的轨迹，依旧以式(3.14)表示。

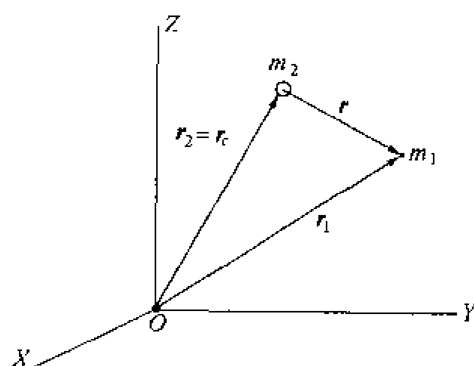


图 3.3　中心引力场中的运动

首先研究能量，为此以 $2\dot{\boldsymbol{r}}$ 左侧点乘式(3.16)，得

$$2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} + 2\frac{\mu}{r^3}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) + \frac{\mu}{r^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2) + \frac{\mu}{r^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) =$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2) - 2\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

因 $\mu = \text{const}$，上式积分得

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon_e \tag{3.17}$$

ε_e 为积分常数。上式第一项是 m_1(空间飞行器)单位质量的动能，第二项是其单位质量的势能。后一结论可证明如下：

在中心引力场内，m_2 对 m_1 的引力为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mu m_1}{r^3}\boldsymbol{r}$$

将 m_1 从 $\boldsymbol{r}_1$ 处移动到 $\boldsymbol{r}_2$ 应做功为

$$-\mu m_1\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是由 $\boldsymbol{r}_1$ 到 $\boldsymbol{r}_2$ 轨迹上的微弧段(图 3.4)，考虑到

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = r\mathrm{d}s\cos(\boldsymbol{r},\hat{\ }\mathrm{d}\boldsymbol{s}) = r\mathrm{d}r$$

其中$(\hat{r,ds})$是$\boldsymbol{r}$和$d\boldsymbol{s}$间的夹角，而$d\boldsymbol{r}$是$d\boldsymbol{s}$在$\boldsymbol{r}$方向上的投影(图3.4)，上述积分可以写成

$$\frac{\mu m_1}{r_2}-\frac{\mu m_1}{r_1}$$

如认为m_1运动到无穷远时势能为零，即$r\to\infty$时$-\frac{\mu m_1}{r}\to 0$，那么在r_1点的势能便是$-\frac{\mu m_1}{r_1}$。一般地，在任意r点，单位质量的势能是

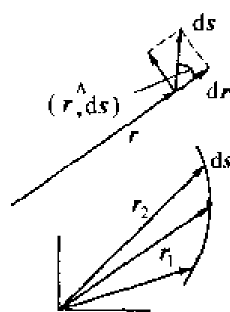


图3.4　引力作功

$$U=-\frac{\mu}{r} \tag{3.18}$$

注意，势能在无穷远处为零，而在有限远处为负。

所以，式(3.17)表示空间飞行器在轨道任意点的动能与势能之和总为常数，这就是能量守恒。

速度矢量还可以写成分量形式，为此先把$\boldsymbol{r}$写成$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_r$是矢径$\boldsymbol{r}$正向的单位矢量(图3.5)，对$\boldsymbol{r}$求时间导数，有

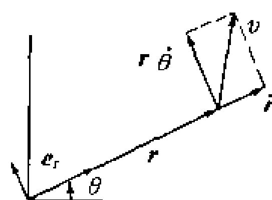


图3.5　速度的分解

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\boldsymbol{e}}_r$$

根据单位矢量对时间求导的法则(见附录5)，显然有$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_r$，其中$\boldsymbol{\omega}$是$\boldsymbol{e}_r$亦即$\boldsymbol{r}$在惯性空间的角速度，其模为$\dot{\theta}$，它与$\boldsymbol{e}_r$叉乘后的方向与$\boldsymbol{r}$垂直，与在$m_1$运动平面指向前方的单位矢量$\boldsymbol{e}_\theta$同向。所以

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{3.19}$$

式中，$\dot{r}$和$r\dot{\theta}$分别是速度$\boldsymbol{v}$在矢径方向和其垂直方向的分量。式(3.19)自身点乘后代入式(3.17)，则能量方程还可以表示为

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\mu}{r}=\varepsilon_e \tag{3.20}$$

由图3.5和矢量叉乘的定义，写出角动量$\boldsymbol{h}$的模

$$h=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=rv\sin(\hat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}})=r^2\dot{\theta} \tag{3.21}$$

代入式(3.20)，还有

$$\frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{h^2}{2r^2}-\frac{\mu}{r}=\varepsilon_e \tag{3.22}$$

式(3.17)、式(3.20)、式(3.22)是中心引力场运动中能量守恒的几种表示形式，是十分重要的关系式。

轨道的形状，仍由式(3.14)描述，设

$$p=h^2/\mu \tag{3.23}$$

代入式(3.14)，有

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{3.24}$$

当 e 取不同数值时,轨道形状如表 3.1 的规定(圆锥曲线)(图 3.6),m_2 所在点是圆锥曲线的一个焦点。设 $\theta = 90°$,有 $r = p$,故又称 p 为半正焦弦;取 $\theta = 0$ 时,得 $r = r_{min}$,显见 θ 角是以 r_{min} 为零起始线的(图 3.7 是椭圆的例子),和前面一样,称 θ 为**真近角**。

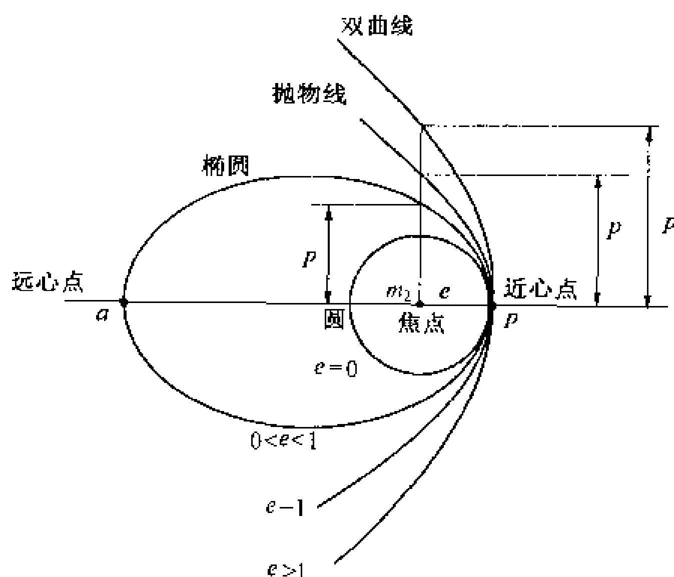


图 3.6 圆锥曲线

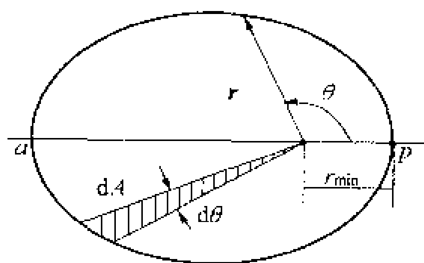


图 3.7 矢径扫过的面积

德国天文学家开普勒早于1609 ~ 1619年便总结出天体运动的三大定律,**开普勒第一定律**是关于轨道形状的,可叙述为:物体在中心引力场中的运动轨迹是圆、椭圆、抛物线或双曲线等圆锥曲线,中心引力体位于上述曲线的(一个)焦点上。如把式(3.21)写成

$$h = rr\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$$

便可看出,右侧分子表示空间飞行器在轨道上运动时,矢径转过 $\mathrm{d}\theta$ 角时所扫出的扇形面积的二倍(图 3.7),设该面积为 $\mathrm{d}A$,则有

$$h = 2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \tag{3.25}$$

由于动量矩守恒(式(3.10)),上式表明空间飞行器在单位时间内扫过的扇形面积为常值,或说扇面速度为常值。这个结论适用于所有四种形状的轨道,它又被称为**开普勒第二定律**。显然,轨道半径越大,速度越小,反之亦然,即在近心点飞行器有最大的速度,而在远心点速度最小。

下面研究各类不同形状轨道和它们的运动及几何参数的特点。

3.2.2 圆轨道

当 $e = 0$ 时,轨道为圆形,此时式(3.14)或式(3.24)成为

$$r = h^2/\mu = p \tag{3.26}$$

显然,$\dot{r} = 0$,所以速度只有与 r 垂直的分量,由式(3.19)

$$v_c = r\dot{\theta} \tag{3.27}$$

易知

v_c 称圆轨道或环绕速度,下标 c 表示圆形轨道。将 $h = rv_c$ 代入式(3.26),有

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \tag{3.28}$$

如以地球参数代入,由上式可求得 $v_c = 7.9$ km/s,称为**第一宇宙速度**,它是人造卫星的最小理论速度。绕行一圈所需的时间,是圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \tag{3.29}$$

对于地球而言,其最小值为 84.5 min。

再把上述各种关系代入式(3.22),可得圆周运动时飞行器的总能量

$$\varepsilon_e = -\frac{\mu}{2r} \tag{3.30}$$

其值为负,这是因为轨道各点的动能小于势能,而后者为负的原因。

3.2.3 椭圆轨道

为了应用方便,首先给出椭圆各几何参数间的关系(图 3.8)。$\theta = 0$ 时,由式(3.24)和图中几何关系得近心点半径和半正交弦 p 之间的关系

$$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \tag{3.31}$$

$\theta = \pi$ 时得远心点半径

$$r_a = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \tag{3.32}$$

其中,长半轴与半正交弦有如下关系

$$a = \frac{p}{1-e^2} \text{ 或 } p = a(1-e^2) \tag{3.33}$$

所以

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \tag{3.34}$$

椭圆的短半轴和面积分别是

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \tag{3.35}$$

当飞行器在椭圆轨道 s 点(图 3.9)时,其真近角 θ 和偏近角 ψ 满足下式

$$\cos\psi = \frac{ea + r\cos\theta}{a} \tag{3.36}$$

或

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\psi}{2} \tag{3.37}$$

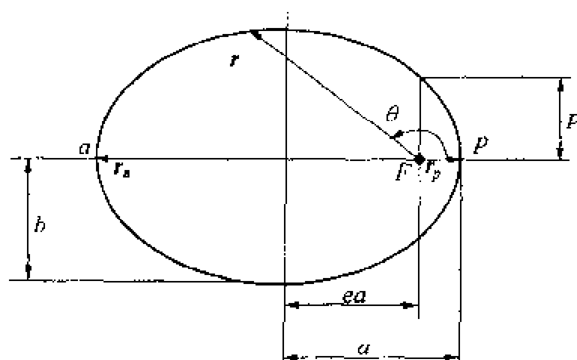


图 3.8　椭圆轨道的几何关系

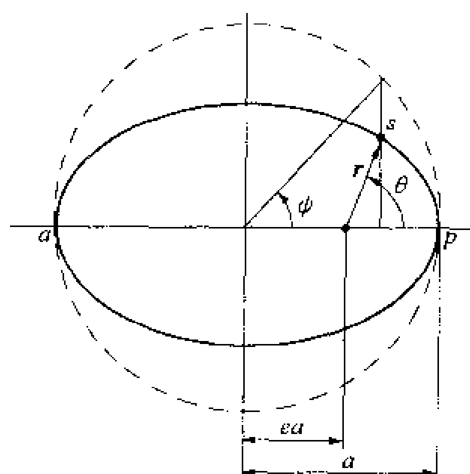


图 3.9　偏近角与真近角

式(3.24)对时间求导数,并令 $\theta=0$,易知在近地点有 $\dot{r}=0$,所以能量方程式(3.20)成为

$$\frac{r_p^2\dot{\theta}^2}{2}-\frac{\mu}{r_p}=\varepsilon_e$$

利用式(3.21)和式(3.23)改造上式第一项,得

$$\mu\left(\frac{p}{2r_p^2}-\frac{1}{r_p}\right)=\varepsilon_e$$

再以 $r_p=a(1-e)$ 和 $p=a(1-e^2)$ 代入,经推导,得椭圆运动的总能量

$$-\frac{\mu}{2a}=\varepsilon_e$$

代入式(3.20)、式(3.22)及式(3.17),求得能量方程的各种表达形式

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a} \tag{3.38a}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+h^2/r^2)-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a} \tag{3.38b}$$

$$\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a} \tag{3.38c}$$

由于 a 和 μ 都是正值,所以椭圆轨道上的空间飞行器总能量为负。

式(3.14)和式(3.24)都未明显给出轨道运动和时间的关系,为了求出这个关系,先由式(3.23)和式(3.21)求得

$$p=\frac{r^4\dot{\theta}^2}{\mu}$$

再把式(3.24)代入,消去 r,开平方后得时间和 θ 角的关系

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\mathrm{d}t=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

对上式积分极为困难，为此把真近角改换为偏近角。先由式(3.33) 和式(3.24) 求得

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{3.39}$$

解出 $\cos\theta$，代入式(3.36)，经化简得偏近角表达式

$$\cos\psi = \frac{a-r}{ae} \tag{3.40}$$

再对时间求导，得

$$\sin\psi = \frac{\dot{r}}{\dot{\psi}}\frac{1}{ae}$$

上两式平方相加，有

$$\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\psi}}\right)^2 = a^2e^2 - (a-r)^2$$

再取式(3.38b) 乘以 $2ar^2/\mu$，并用式(3.23) 和式(3.33)，消去 h^2/μ 和 p，化简后，有

$$\frac{r^2\dot{r}^2a}{\mu} = a^2e^2 - (a-r)^2$$

比较最后两式，得

$$\frac{r^2a}{\mu} = \frac{1}{\dot{\psi}^2} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\psi}\right)^2$$

从式(3.40) 中求出 r，代入上式，开方后，得

$$(1-e\cos\psi)\mathrm{d}\psi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\mathrm{d}t$$

如认为 $\psi = 0$(即近地点) 为计时起点则对上式积分，得

$$nt_p = \psi - e\sin\psi \tag{3.41}$$

这就是以偏近角 ψ 表示的时间方程式，又称为**开普勒时间方程式**。其中，t_p 是以近地点为时间零位的飞行时间，而平均角速度(解释见式(3.45)) 为

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{3.42}$$

应用式(3.41)、式(3.36) 或式(3.37)、式(3.24) 即可以求得椭圆轨道各点的 r，θ 和时间 t_p 的关系。

若从式(3.41) 中消去 ψ，代之以 θ 的关系，还可求得真近角与时间 t_p 的方程。为此将式(3.39) 代入式(3.36)，再代入下式

$$\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-\left[e+\frac{(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right]^2} =$$
$$\frac{1}{1+e\cos\theta}\sqrt{(1+e\cos\theta)^2-[e(1+e\cos\theta)+(1-e^2)\cos\theta]^2} =$$
$$\frac{1}{1+e\cos\theta}\sqrt{(1+e\cos\theta)^2-(e+\cos\theta)^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

再由式(3.37) 求得

$$\psi = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

把 $\sin\psi$ 和 ψ 代入式(3.41),得

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right] \tag{3.43}$$

这就是我们欲寻求的关系式。

前已证明,椭圆轨道上的空间飞行器速度服从扇面速度为常值的开普勒第二定律,而沿椭圆轨道运动一周的时间,则可由上式求得,亦可由式(3.25)积分求得,即当空间飞行器运行一个周期 T 时,扫过的扇面积为轨道包含的椭圆面积,所以有

$$T = \frac{2A}{h}$$

把式(3.35)代入消去 A,式(3.23)和式(3.33)第二式代入消去 h,得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{3.44}$$

此式显然和式(3.29)是一致的,它又被称为**开普勒第三定律**。由上式可见空间飞行器在椭圆轨道上运行的周期只与半长轴有关。把式(3.42)代入式(3.44),还有

$$T = \frac{2\pi}{n} \tag{3.45}$$

由上式,易知 n 相当于椭圆轨道上运行的飞行器的平均角速度。

速度和矢径 $\boldsymbol{r}$ 的关系,可从式(3.38c)求得,即

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \tag{3.46}$$

在近地点和远地点,分别有最大速度 v_p 和最小速度 v_a

$$v_p = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}\frac{2r_a}{r_a + r_p}} \tag{3.47}$$

$$v_a = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}\frac{2r_p}{r_a + r_p}} \tag{3.48}$$

这几个方程式,虽是从能量方程式派生出来的,但经常使用,应牢记。

椭圆和圆轨道上的运动是周期和封闭的,圆是椭圆的特例,是 $e = 0$ 的情况,$0 < e < 1$ 时都是椭圆。

3.2.4　抛物线轨道

当 $e = 1$ 时,式(3.24)演化为抛物线方程式

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} \tag{3.49}$$

如令 $r = \infty$,由上式可求得 $\theta_\infty = \pi$,可见飞行器是平行于曲线的对称线飞至无穷远成为抛物线的(图3.10)。

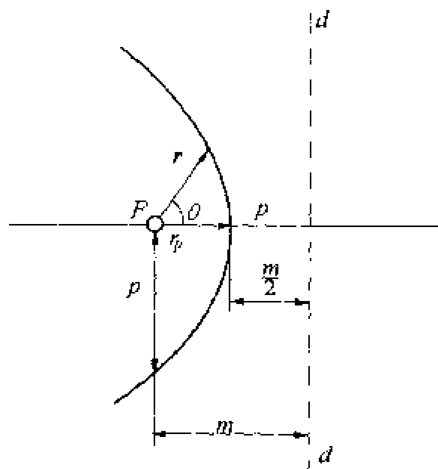


图3.10　抛物线轨道

这类轨道的速度表达式十分简单，先求上式的时间导数

$$\dot{r} = \frac{p \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \dot{\theta}$$

再求速度平方

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^4} p^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

利用式(3.49)，式(3.21)和式(3.23)，改造上式得

$$v^2 = \left(\frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} + 1 \right) r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{2r^2\dot{\theta}^2}{1 + \cos \theta} = \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{p} = \frac{2h^2}{pr} = \frac{2\mu}{r}$$

即

$$v = \sqrt{2 \frac{\mu}{r}} \tag{3.50}$$

与式(3.28)比较，显然有：在相同矢径处，沿抛物线飞行的飞行器，速度是圆轨道的$\sqrt{2}$倍(两者的方向，除在近地点处，是不相同的)。这是卫星脱离中心引力体(逃逸，不返回)的最低速度，当以地球半径和相应引力参数代入时，所得结果称为**第二宇宙速度**，其值为11.2 km/s。如把式(3.50)代入式(3.17)，便会发现空间飞行器在抛物线轨道上运动时总能量为零，即

$$\varepsilon_e = 0 \tag{3.51}$$

这说明在抛物线轨道上各点的动能恰好与势能的负值相等。

抛物线运动的时间方程，可由式(3.21)求得，把它改写为$\mathrm{d}t = r^2\mathrm{d}\theta/h$，以式(3.49)代入该式，并考虑到式(3.23)，便有

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

显然，对于椭圆轨道类似的式子很难积分，而上式却是可能的。如认为近心点 p 处时间为零，便有

$$t_p = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right) \tag{3.52a}$$

考虑到 $p = 2r_p$(图3.10)，上式还可以写成

$$t_p = \sqrt{\frac{2r_p^3}{\mu}} \left(\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right) \tag{3.52b}$$

飞行器从矢径等于 r_1 运行到 r_2 处所需的时间间隔，可推导如下：先利用三角公式 $(1 + \cos\theta) = 2\cos^2 \frac{\theta}{2}$，由式(3.49)并经变换求得

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{p}{2r}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{p}{2r}$$

所以有(并考虑到 $p = 2r_p$)

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{r}{r_p}-1} \tag{3.53}$$

由式(3.52b),就可求得

$$\Delta T=t_p(r=r_2)-t_p(r=r_1)=$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2r_p^3}{\mu}}\left[\sqrt{\frac{r_2}{r_p}-1}\left(1+\frac{r_2}{2r_p}\right)-\sqrt{\frac{r_1}{r_p}-1}\left(1+\frac{r_1}{2r_p}\right)\right] \tag{3.54}$$

还应注意的是,沿抛物线轨道和双曲线轨道飞行都是不返回的非周期运动,而前者是后者的极限状态,是 $e=1$ 的情况,而 $e>1$ 的无数情况都是双曲线,因此,我们经常遇到的都是后者。

3.2.5　双曲线轨道

当 $e>1$ 时,式(3.24) 给出一条双曲线轨道。事实上,双曲线共有两(图 3.11),飞行器只在其中之一运动。由图 3.11 知

$$r_p=ea-a=a(e-1) \tag{3.55}$$

而从式(3.24),当 $\theta=0$ 时可得

$$r_p=\frac{p}{(1+e)} \tag{3.56}$$

比较上述两式,有

$$p=a(e^2-1) \tag{3.57}$$

令 $r=\infty$,由式(3.24) 可以求得对应的 θ_∞,也就是飞行器沿双曲线飞至无穷远时的真近角,它是

$$\cos\theta_\infty=-\frac{1}{e}\ \text{或}\ \theta_\infty=\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \tag{3.58}$$

此时矢径和渐近线 od 趋于平行,所以渐近线 od 和 om 间夹角就是 θ_∞(见图 3.11)。换言之,飞行器自无穷远处沿 co 渐近线附近的双曲线飞来,转过中心星体后又沿 od 渐近线近旁的双曲线飞出,整个飞行过程中,飞行器速度是从与 oc 渐近线平行的方向转变为 od 渐近线的方向,速度的转角就是图中的 δ,且有

$$\theta_\infty=\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{2} \tag{3.59}$$

由式(3.58) 即可求得

$$\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{e} \tag{3.60}$$

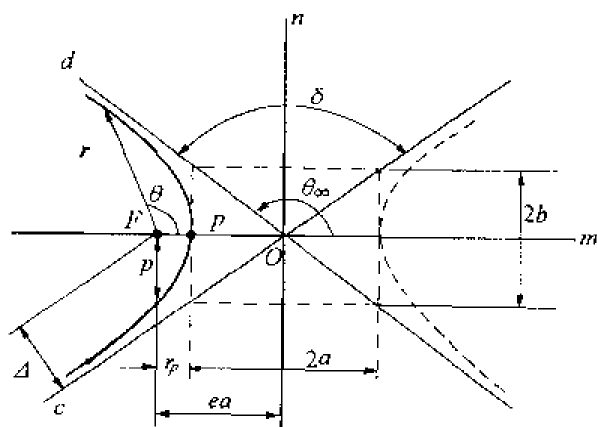


图 3.11　双曲线轨道

对于能量方程式,以类似用于椭圆轨道的方法,据式(3.24)、式(3.55) 和式(3.56),可以求得类似式(3.20) 的表达式是

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\mu}{r}=\frac{\mu}{2a} \tag{3.61a}$$

或

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \tag{3.61b}$$

可见总能量是正的。汇总以上各类轨道的总能量，显见圆和椭圆为负，抛物线轨道为零，而双曲线轨道则是正的。

由式(3.61b)还可求得无穷远处($r = \infty$)对应的飞行器速度是

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{3.62}$$

如果双曲线的焦点 F(中心星体的质心)与渐近线的距离是 Δ(图 3.11)，那么飞行器在双曲线上运动时的动量矩可以写成

$$h = v_\infty \Delta \tag{3.63}$$

将式(3.23)，式(3.57)和式(3.62)代入有

$$h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\Delta$$

所以

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1} \tag{3.64}$$

由式(3.62)，有 $a = \mu/v_\infty^2$，代入式(3.64)，则有

$$e^2 = 1 + \frac{v_\infty^4 \Delta^2}{\mu^2} \tag{3.65}$$

从式(3.55)求出 a，代入式(3.62)，还可求得偏心率的另一种表达形式

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu} \tag{3.66}$$

由式(3.61a)及式(3.62)还可求出任一点速度的表达式

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)} \tag{3.67}$$

对于双曲线轨道，其时间方程式可用类似 3.2.3 节中的方法，先求得

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\mathrm{d}t = \frac{1}{(1 + e\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

再求积分

$$\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{1}{e^2 - 1}\left[\frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}\ln\left(\frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1}\tan\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1}\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)\right]$$

所以，如以近心点 p 为时间的计算起始点，并以 t_p 表示，由上式可得

$$t_p = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\left[\frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}\ln\left(\frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1}\tan\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1}\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)\right]\frac{1}{e^2 - 1}$$

若把 $p = a(e^2 - 1)$ 代入上式，便有

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\frac{e\sqrt{e^2 - 1}\sin\theta}{1 + e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1}\tan\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1}\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)\right] \tag{3.68}$$

第四章　轨道的建立和星下点轨迹

本章的内容将与第二章衔接，研究空间飞行器入轨之后，将形成一个什么样的轨道，或者反过来，预定的轨道将要求什么样的入轨点参数：矢径（入轨点高度）、速度的大小和方向。然后分析在地面固定点发射空间飞行器时，发射状况和轨道参数间的关系。最后研究空间飞行器的星下点轨迹。

4.1　轨道的建立

本节研究运载器发动机关机时，飞行器速度 $\boldsymbol{v}_0$，速度与当地水平线夹角 β_0 和关车矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 三个参数（图 4.1）与所建立轨道形状之间的关系。

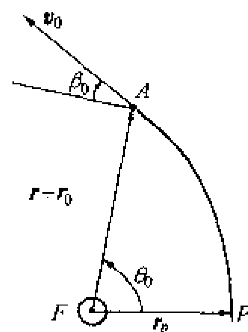


图 4.1　轨道的速度

假如 r_0 和 θ_0 分别是所建立的轨道在 A 点的矢径和真近角（图 4.1）。由式(3.24) 知，对于圆锥曲线，只要知道偏心率 e 和半正交弦 p，就能惟一地确定飞行器轨道，一般地说，e,p,a 中只要给定其中两个，轨道就能被确定。这里，$p = h^2/\mu$，其中的角动量可由初始条件 β_0、r_0、v_0 确定

$$h = v_0 r_0 \sin(\widehat{v_0, r_0}) = v_0 r_0 \cos\beta_0 \tag{4.1}$$

若再求得 e，确定轨道形状的问题，即得到解决。不过为了应用上的方便，常将参数 p 改换为入轨点 A 处的真近角 θ_0，应用 θ_0 和 e 同样可以确定轨道的形状。下面就来推导它们的表达式。

令 $\rho = 1/r$，则由式(3.24)，得

$$\rho = 1/r = \frac{\mu(1 + e\cos\theta)}{h^2} \tag{4.2}$$

速度 v_0 在水平方向的投影是 $r\dot{\theta}$，由图 4.1 和式(3.21) 及式(4.1)，还可写出

$$v_0\cos\beta_0 = r_0\dot{\theta}_0 = \frac{h}{r_0} \tag{4.3}$$

速度在矢径方向的分量是 $\dot{r}$，可写为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{h}{r^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right)h = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}h \tag{4.4}$$

由式(4.2) 求出 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ 代入上式，并参考图 4.1 的几何关系 $v_0\sin\beta_0 = \dot{r}_0$，因此有

$$v_0\sin\beta_0 = \dot{r} = \frac{\mu e\sin\theta_0}{h} \tag{4.5}$$

把式(4.1) 代入上式，同时代入式(3.24)，分别求得

$$e\sin\theta_0 = (r_0 v_0^2/\mu)\sin\beta_0\cos\beta_0$$

$$e\cos\theta_0 = (r_0v_0^2/\mu)\cos^2\beta_0 - 1 \tag{4.6}$$

将上两式相除，及将它们平方相加，可分别得到

$$\tan\theta_0 = \frac{(r_0v_0^2/\mu)\sin\beta_0\cos\beta_0}{(r_0v_0^2/\mu)\cos^2\beta_0 - 1} \tag{4.7}$$

$$e^2 = [(r_0v_0^2/\mu) - 1]^2\cos^2\beta_0 + \sin^2\beta_0 \tag{4.8}$$

由上两式算出 e 和 θ_0，联同已给定的 r_0，便可由式(3.24)求得 p，这就解决了由 β_0、v_0、r_0 确定轨道形状的问题。

由式(3.38c)和式(3.61b)，还可求得轨道的半长轴

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0v_0^2}{\mu}} \quad (\text{椭圆}) \tag{4.9a}$$

和

$$a = \frac{r_0}{\frac{r_0v_0^2}{\mu} - 2} \quad (\text{双曲线}) \tag{4.9b}$$

由式(4.8)知，只要 $\beta_0 \neq 0$，e 便永不可能为零，换言之 $\beta_0 = 0$ 是得到圆轨道的必要条件。而当 $\beta_0 = 0$ 和 $e = 0$ 时，便有

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$

这正是式(3.28)的结果。若 $e = 1$(抛物线轨道)，由(4.8)可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$$

恰是式(3.50)的结果。

式(4.7)和式(4.8)为超越方程式，当要求精度不高时，可以采用图解方法求解。将式(4.8)绘成的曲线如图4.2所示，由图4.2，可根据无因次参数($r_0v_0^2/\mu$)、β_0 和偏心率 e

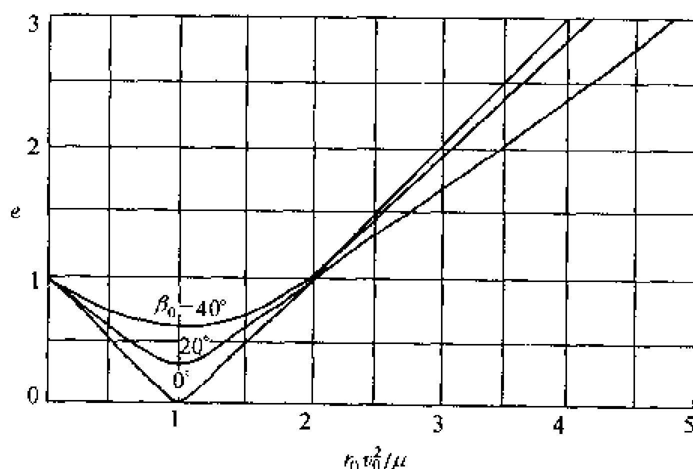


图 4.2　$r_0v_0^2/\mu$ 与 e，β_0 之间关系

中的两者求出第三个量。对于椭圆轨道式(4.7)和式(4.8)还可绘成图4.3所示的曲线，而与双曲线轨道对应的曲线如图4.4所示。它们给出了 e、$(r_0v_0^2/\mu)$、θ_0 和 β_0 之间的关系，若已知其中两个，可由上图求得另外两个参数。但应注意，有时会出现双值的结果(如根据 $(r_0v_0^2/\mu)$ 和 e 求 β_0 和 θ_0)，此时需根据题意或其他要求选择其中之一。

【例1】 入轨点高度 $H_0 = 222$ km，速度是该高度环绕速度的1.2倍，方向为 $\beta_0 = 20°$，试确定空间飞行器的轨道。

据题意，有

$$r_0 = R_{\oplus} + H_0 = 6\ 378 + 222 = 6\ 600\ \text{km}$$

$$\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1.2^2 = 1.44$$

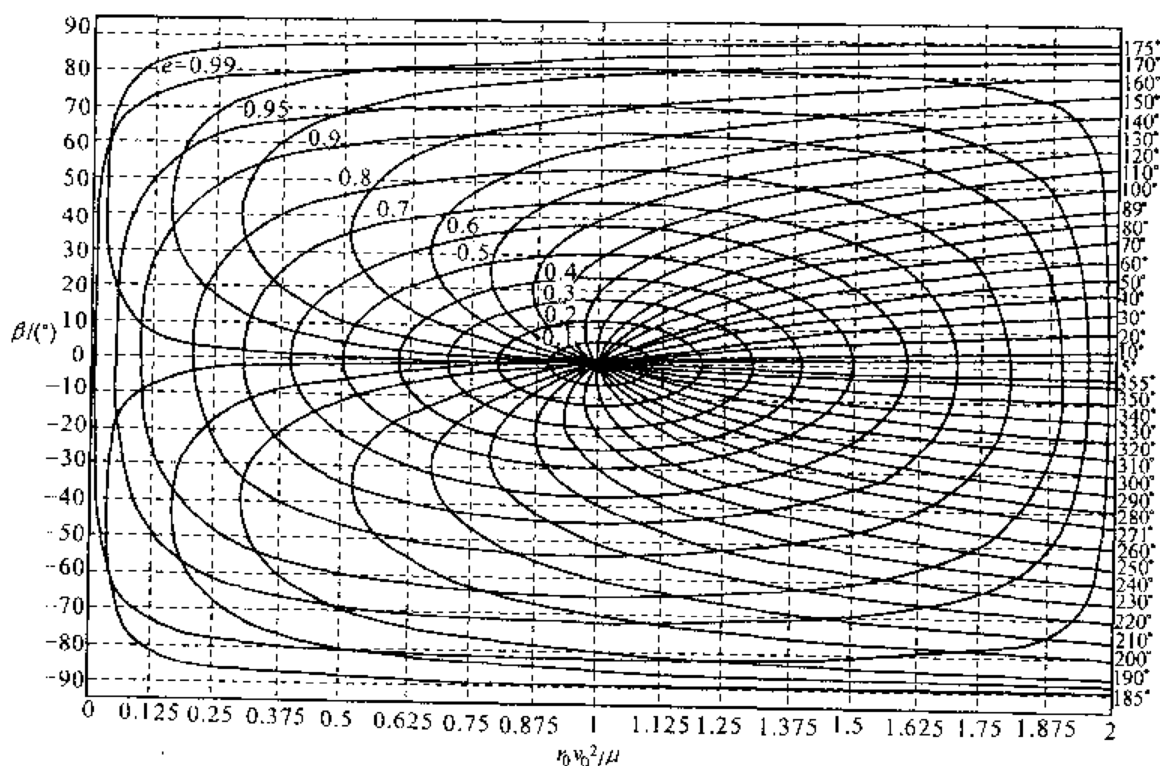


图4.3　椭圆轨道，β 与 rv^2/μ 之间关系，以 e 及 θ 为参变数

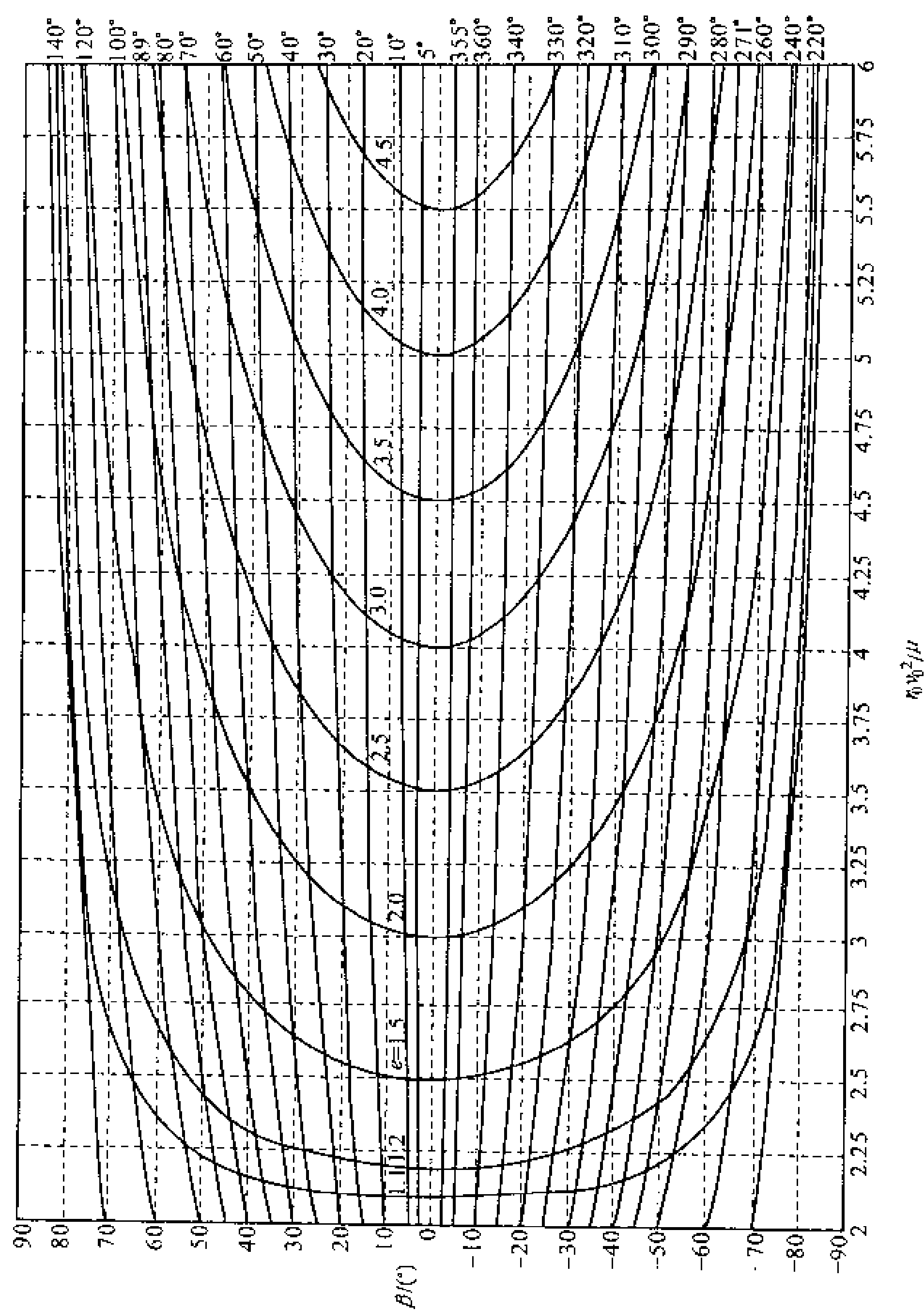


图 4.4　双曲线轨道，β 与 rv^2/μ 之间关系，以 e 及 θ 为参变数

由图 4.3，据 $r_0v_0^2/\mu = 1.44$ 和 $\beta_0 = 20°$，可求得 $e = 0.54$ 和 $\theta_0 = 60°$，而从式(4.9a)计算得 $a = 15\,357$ km。轨道形状和与地球的关系见图 4.5。上述参数也可用式(4.7)和式(4.8)计算，所得结果全同。

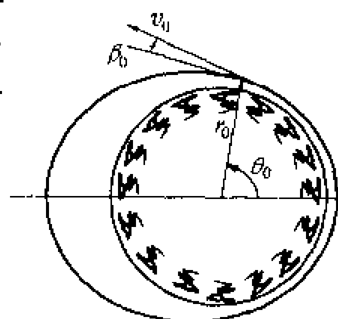


图 4.5　例 1 示意图

4.2　轨道要素与发射参数的关系

轨道要素又称轨道根数，它们确定轨道平面在空间的取向，轨道在轨道平面中的取向，轨道的形状和空间飞行器在轨道上的位置。轨道要素共有六个，即**轨道倾角** i、**升交点**(或**降交点**)、**经度** Ω、**近心点角距** ω、**真近角** θ、**轨道半长轴** a 和**偏心率** e。

首先说明，空间飞行器轨道平面必定通过中心引力体(如地球)的中心。这是因为平面运动中的作用力一定在该平面内(否则力的非平面分量会把质点带出运动平面)，而两体运动中的引力是通过中心体质心的(忽略各种摄动因素)。

其次，要明确地球的经纬度关系。图 4.6 示出了地球及地轴 NS，N 为北极，S 为南极，垂直于 NS 轴的大圆是赤道，过地轴的平面称为**子午面**，它与地球表面的交线是**子午线**。一般以过英国伦敦附近格林尼治(Greenwich 简写为 Gr)天文台的子午线为经度的计算零点，向东为**东经**，向西为**西经**，以 λ 表示经度角。地球上某点 P，它的经度可以用过格林尼治天文台和 P 点子午面的夹角(λ 角)表示。P 点的纬度则用 P 子午面中赤道和 P 点对应的中心角 φ 的大小来度量，北半球为**北纬**，南半球为**南纬**。

图 4.7 中 O 点表示地心，外面的球体是以 O 为球心、半径任意的球，称为**天球**。轨道平面相对地球的关系可由轨道倾角 i 和升交点经度 Ω 表示(图 4.7)。i 是赤道平面与轨道平面间的夹角，Ω 则是零子午面(过格林尼治天文台)与赤道交点沿赤道至**升交点**的角度，而升交点则是空间飞行器自南半球至北半球时过赤道面的点。类似的自北半球穿过赤道面到南半球的点是**降交点**，而升、降交点间的连线称为**节线**，它也是轨道平面与赤道平面的交线。

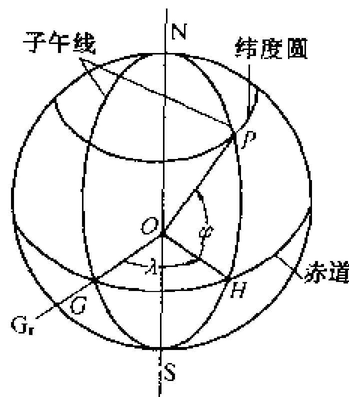


图 4.6　经纬度示意

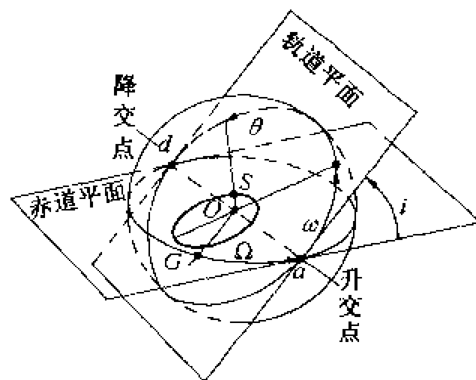


图 4.7　轨道面的方位

轨道在轨道平面中的取向由近心点角距 ω 确定，它是近心点矢径延长线与节线间的

夹角。

其余三个轨道要素前面的章节已有研究，不赘述，它们分别确定空间飞行器在轨道上的位置（θ 角）和轨道的形状（e 和 a）。

六个轨道要素中的参数 a、e 可由入轨点参数 r_0、β_0、v_0 决定（4.1节），而 Ω、i 和 ω 则取决于发射地点的经、纬度和发射方向，下面就研究后一问题。

在图4.8中，球体为天球，c 点是飞行器入轨点，该处的速度为 v_0，轨道矢径是 r_0。作过 c 点子午线的切线 cb，它的方向为南北。再作过 c 点天球的切面，它与赤道平面交于 ab 线。ab 为东西取向，显然有 $ab \perp cb$ 和 $ab \perp Ob$。速度 v_0 的铅垂分量 v_V 在子午面中与 Oc 半径重合，水平分量 v_H 在切平面中，与东向 E 成 ν 角。若点 a 取在 v_H 的延长线上，则 Oca 平面就是轨道平面，Oa 是轨道平面与赤道平面的交线，即节线。轨道平面与赤道的交点 k 即为升交点，零子午线沿赤道至 k 的角度为升交点经度 Ω，Ok 和 Oc 半径间的夹角是近心点角距 ω 与真近角 θ_0 之和。$\angle cOb$ 和 $\angle bOG$ 分别是 c 点的纬度 φ 和经度 λ，做 cdf 面，使之垂直于赤道面和 Oa 线。

设 $\Delta\lambda = \lambda - \Omega$，由 $\triangle abO$、$\triangle abc$ 和 $\triangle Ocb$ 可以写出

$$\tan \Delta\lambda = \frac{Ab}{Ob}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) = \cot \nu = \frac{ab}{cb}$$

图4.8 轨道要素间的几何关系

$$\sin\varphi = \frac{cb}{Ob}$$

由上述三式即可求得

$$\tan\Delta\lambda = \cot\nu\sin\varphi \tag{4.10}$$

如果取 $\Delta\lambda$ 的主值,升交点经度便是(参考图 4.8)

$$\Omega = \begin{cases} \lambda - \Delta\lambda & \text{向东北或西北方向发射}, \nu > 0 \\ \lambda - \Delta\lambda + \pi & \text{向东南或西南方向发射}, \nu < 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

需说明的是,式(4.10) 中北半球 φ 为正,南半球为负;ν 角以东方为基准,向北方转动为正,向南为负。

再从 $\triangle cdO$、$\triangle cdf$ 和 $\triangle Odf$ 中,写出

$$\tan\varphi = \frac{cd}{Od}, \tan i = \frac{cd}{fd} \text{ 和 } \sin\Delta\lambda = \frac{fd}{Od}$$

由这三式还可求得

$$\tan i = \frac{\tan\varphi}{\sin\Delta\lambda} \tag{4.12}$$

利用式(4.10) 和三角关系,求出

$$\sin\Delta\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\Delta\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\nu/\sin^2\varphi}}$$

把它代人式(4.12),便有

$$\tan i = \sqrt{\tan^2\varphi + \frac{\tan^2\nu}{\cos^2\varphi}} \tag{4.13}$$

式(4.11) 和式(4.13) 可用来根据人轨点经纬度和速度与东向的夹角求出轨道倾角 i 和升交点经度 Ω。

应注意式(4.13) 中正负号的取法,如果人轨点 c 处空间飞行器速度有东向分量,应取正号;反之,有西向分量时取负值,而不必考虑 φ 值的正或负。

由式(4.13) 易知,无论 ν 角为何值,因根号下第二项总为正,所以轨道倾角 i 绝对值总是大于或等于当地纬度 φ。当 $\nu = 0$(向东) 或 π(向西) 时,$i = \varphi$ 或 $\pi - \varphi$(向西);当 ν 逐渐从零增大到 $\frac{\pi}{2}$(向北) 或逐渐变小至 $-\frac{\pi}{2}$(向南) 时轨道倾角都是从 φ 增至(或从 $(\pi-\varphi)$ 减至) $i = \frac{\pi}{2}$。$i = \frac{\pi}{2}$ 称为极轨道,而 $i = 0$ 时则称为赤道轨道。

最后,还要求出 ω 角,为此由 $\triangle Ocf$、$\triangle Ocd$ 和 $\triangle cdf$ 写出

$$\sin(\omega+\theta_0) = \frac{cf}{Oc}, \sin\varphi = \frac{cd}{Oc}, \sin i = \frac{cd}{cf}$$

所以有

$$\sin(\omega+\theta_0) = \frac{\sin\varphi}{\sin i} \tag{4.14a}$$

或

$$\omega = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin i}\right) - \theta_0 \tag{4.14b}$$

由此即可求得 ω 角。值得注意的是，式(4.14a)给出的只是轨道连拱线(近心点和远心点连线)与节线之间的夹角，我们还应根据实际情况判断由式(4.14b)求得的角度是近心点还是远心点。

应注意的是，有时取随地球转动的、通过格林尼治天文台的子午面为升交点经度 Ω 的计算起点，应用起来并不方便，其数值将随地球转动而改变，对于研究相对其他星球运动等情况，会造成麻烦。这时 Ω 的计算起点常取黄道平面(地球绕太阳旋转的轨道平面)上自太阳指向春分点的方向，也就是地球赤道平面与黄道平面的交线。为区分这两种情况，有时又称前者为**升交点赤经**，而后者为**升交点黄经**。

4.3 星下点轨迹

星下点是空间飞行器与地心连线和地面的交点，**星下点轨迹**则是当空间飞行器运动时星下点在地面形成的连续曲线。

假如地球不做自转运动，空间飞行器将一直在相对地球固定方位不变的轨道平面中运动，则星下点轨迹就是这个平面与地球相截的大圆。然而，由于地球不停地自西向东旋转，而空间飞行器的轨道又有多种，各点的飞行速度快慢不同，所以星下点轨迹呈现出繁多的图形。

如果把图4.8中的 c 点视为飞行器在任意时刻的位置，该图还可以用来计算星下点轨迹，这时图中的 v_0、r_0 和 θ_0 三个入轨点的参数，应改为 v、r、θ 任意瞬时参数，入轨点的经纬度(λ,φ)为相应时刻星下点的位置。如令地球在此刻停止转动，由式(4.14a)可得

$$\varphi = \arcsin\left[\sin i \sin(\omega + \theta)\right] \tag{4.15}$$

解反三角函数是多值的，为了消除其不确定性，可取：当 $0 < \omega + \theta < \pi$ 时，$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$；$\pi < \omega + \theta < 2\pi$ 时，$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$。

再从 $\triangle Ocf$、$\triangle cfd$ 和 $\triangle Ofd$，可写出

$$\tan(\omega + \theta) = \frac{cf}{Of},\cos i = \frac{fd}{cf},\tan(\Delta\lambda) = \frac{fd}{Of}$$

合并后便有

$$\tan \Delta\lambda = \cos i \tan(\omega + \theta) \tag{4.16a}$$

取 $\mathrm{sign}(\sin \Delta\lambda) = \mathrm{sign}[\sin(\omega + \theta)]$ 的 $\Delta\lambda$ 为惟一值，然后利用下式计算星下点的赤经

$$\lambda = \Omega + \Delta\lambda \tag{4.16b}$$

利用式(4.15)、式(4.16a)和式(4.16b)，只要知道了 i、ω、Ω，就可根据空间飞行器的真近角 θ，求出该瞬时飞行器星下点对应的经度 λ 和纬度 φ。

然而，i，ω 都是固定值，而 Ω 随着地球的旋转而变化，这是因为轨道平面在惯性空间方位不改变，而地球却绕地轴旋转的缘故。设在某一特殊时刻(如入轨点或某计算点) $t_p{}^*$ 瞬间，求得升交点经度为 Ω^*，其后任意瞬间 t_p 升交点经度应是

$$\Omega = \Omega^* - \omega_e(t_p - t_p^*) \tag{4.17}$$

其中，ω_e 是地球自转角速度，粗算时可取为每日转一圈，或 15°/h，所以式(4.16b)将被修正为

$$\lambda = \Delta\lambda + \Omega^* - \omega_e(t_p - t_p^*) \tag{4.18}$$

其中，t_p 由式(3.37)和式(3.41)计算，即由

$$\psi = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(\psi - e\sin\psi)$$

计算。

图4.9给出了在轨道倾角60°，周期为3 h的圆轨上运行的人造卫星星下点轨迹。假如地球不旋转，其星下点轨迹如图中的虚线所示。事实上，地球每小时自西向东转过15°，当卫星旋转一周回到原点时，地球已向东转过45°，相当于卫星向西移动了相同的距离，所以虚线变成了实线1，以后卫星每转一周都向西平移45°，如图中2、3、4等曲线，直至第八周之后，地球整整转过45×8 = 360°，星下点轨迹又从曲线1重复扫描。星下点附近一定宽度内的区域都是可观区(包括由星上观察地面和从地上观测卫星)。分析可知，南北半球星下点轨迹可达到的极限范围是纬度 $\varphi = i$(本例为南、北纬60°)。由图4.9还可以看出，对于某点(如图中的 D)观看卫星，有时是从西南飞来(曲线2)，有时又是从西北穿越(曲线4)。假如卫星和地球的运转周期不存在公因数，星下点轨迹将永不重复。

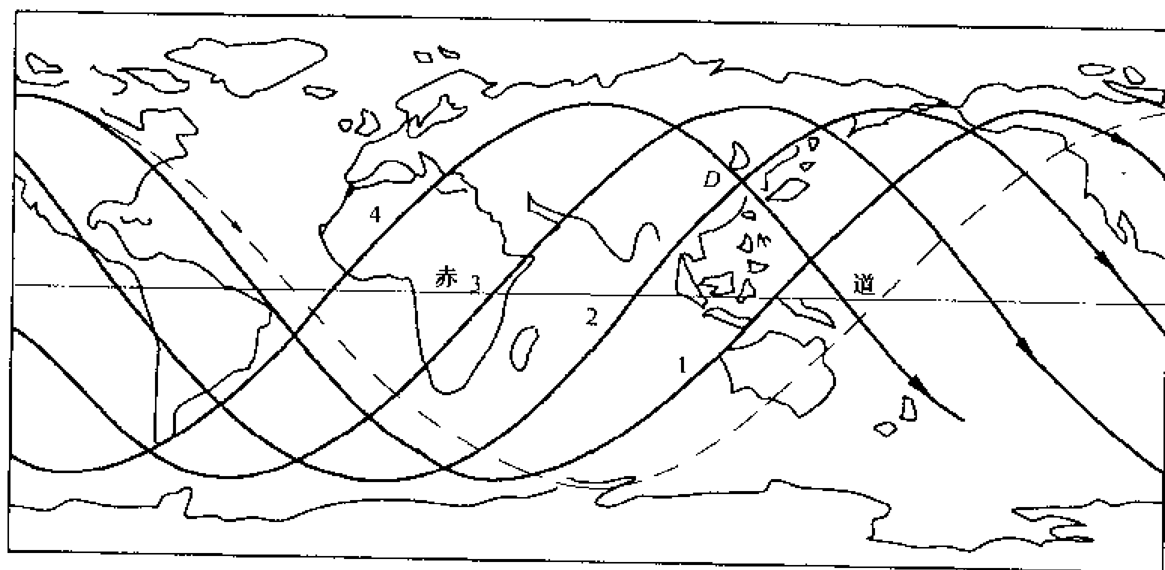


图4.9　圆轨道飞行器的星下点轨道

图4.10是卫星的轨道倾角 $i = 63.4°$，远地点高为40 000 km，在北半球，近地点高为500 km，在南半球，周期为12 h椭圆轨道的例子。图示的星下点轨迹由两段相同的曲线组成，是由于地球旋转一圈，卫星恰恰运动两圈的缘故。星下点轨迹上的标点是时间刻度，每两点之间卫星要运行一小时，可见卫星运行的绝大部分时间是停留在北半球。

假如轨道倾角为零，即轨道平面与赤道平面重合的赤道轨道，而卫星又自西向东飞行，周期为24 h(相当于高度35 800 km)，其星下点一直处于赤道上某处，不随时间变动。这

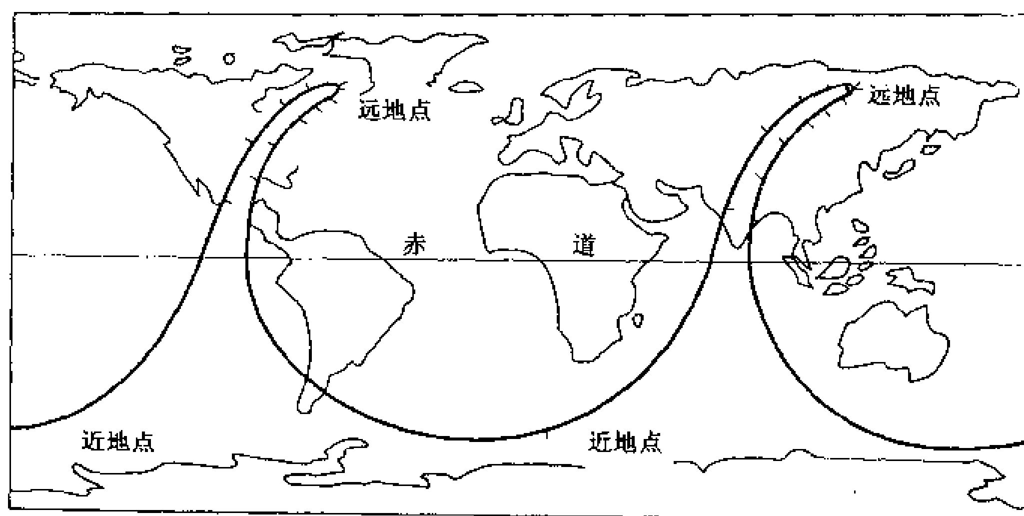


图 4.10 大椭圆轨道飞行器的星下点轨迹

种卫星又称地球静止(或同步)卫星,其用途十分广阔。但如果轨道倾角产生误差,成为某一不为零的 i 角,其他参数准确,则星下点轨迹变成如图 4.11 所示的了(图中为了清晰,把 i 角夸大了)。

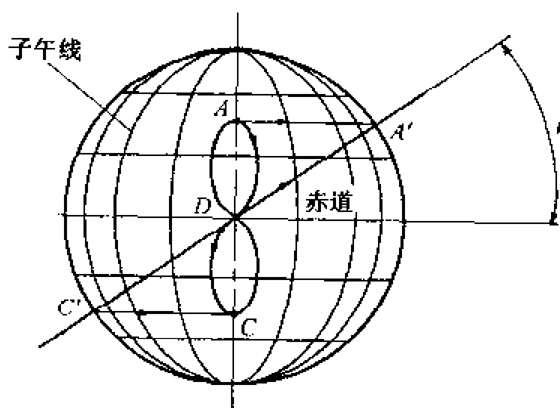


图 4.11 地球同步卫星的星下点轨迹(真实)

4.4 弹道式导弹的射程

远程弹道式导弹,在大气中飞行的时间较少,作为近似计算,可以把空气的影响略去,这样便可利用式(4.7)和式(4.8)计算它的轨道了。根据发射点和预期的弹着点,可以做一过地心的平面,并确定两者之间的中心角 ϕ、椭圆长轴和发射点真近角 θ_0(见图 4.12)。如根据式(4.7)和式(4.8)算出所需的 θ_0、v_0,问题便得到解决(如果需要,还可以计算出偏心率 e 和远地点半径等)。做法如下:由于弹着点与发射点是对称的,故有 $\phi/2 = 180° - \theta_0$ 或 $\tan\theta_0 = -\tan(\phi/2)$,由式(4.7)可得

$$\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{(R_\oplus v_0^2/\mu)\sin\beta_0\cos\beta_0}{(R_\oplus v_0^2/\mu)\cos^2\beta_0 - 1} \tag{4.19}$$

式(4.8)成为

$$e^2 = [(R_\oplus v_0^2/\mu) - 1]^2\cos^2\beta_0 + \sin^2\beta_0 \tag{4.20}$$

给定 ϕ 和 e 后即可求得所需的 β_0 和 v_0(或($R_\oplus v_0^2/\mu$))。

重要的是,以一定的速度 v_0(或 $R_\oplus v_0^2/\mu$)使射程 $\phi R_\oplus$ 或 ϕ 达到最大值,为此对式(4.19)求 β_0 的导数,再令其结果为零,即可求得

$$\cos\beta_0 = \sqrt{\frac{1}{2-(R_\oplus v_0^2/\mu)}} \tag{4.21}$$

由式(4.19)算得的 ϕ 与β_0 的曲线(($R_\oplus v_0^2/\mu$)为参变量)和由式(4.21)所得的 β_0 最佳值曲线,见图 4.13[4]。

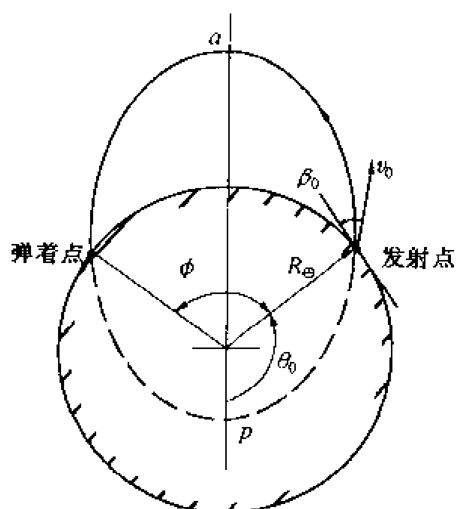


图 4.12　导弹的弹道

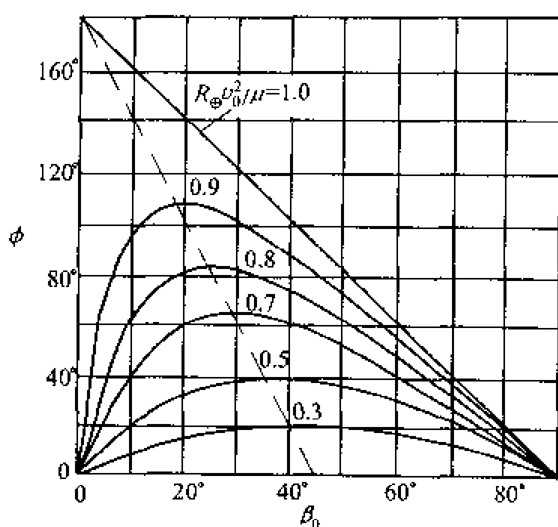


图 4.13　β_0 与 ϕ 的关系

把 $\theta_0 = 180° - \phi/2$ 和 $r = R_\oplus$ 代入轨道方程式(3.24)可求得 p,即

$$p = R_\oplus(1 + e\cos(180° - \phi/2))$$

再用 p 与 a 的关系式(3.33),求得

$$\frac{a}{R_\oplus} = \frac{1 - e\cos\dfrac{\phi}{2}}{1 - e^2} \tag{4.22}$$

此式用来根据给定的 e 计算 a,或反之。

自发射点到弹着点的时间 T,可以按椭圆运行一周的时间,减去二倍近地点 p 至发射点的时间(见图 4.12)计算。据此应用式(3.44)和式(3.43)得

$$T = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\pi - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta_0}{1 + e\cos\theta_0}\right] \tag{4.23}$$

第五章 轨道机动

轨道机动分为:(1) 轨道过渡机动,又称变轨,这是改变轨道参数以便从初始轨道过渡到中间轨道或最终轨道的过程;(2) 轨道校正机动,又称轨道修正,其目的是补偿轨道参数中的误差或由各类干扰因素引起的偏差,它与轨道过渡的不同点在于它不过渡到其他轨道上去;(3) 接近机动,这是两个飞行器在接近和对接过程中的轨道机动。本章研究第一种机动,即轨道过渡机动。

5.1 轨道过渡机动的分类

轨道过渡机动,按新、旧轨道面的关系可分为:同平面过渡和非同面过渡;按轨道形状,又分为圆、椭圆、抛物线、双曲线同类轨道和相异轨道之间的过渡;按机动所需的动力源分为主动机动和被动机动。主动机动也就是发动机动力的机动,根据发动机工作时间的长短还可分为脉冲机动和连续作用机动。脉冲机动就是发动机短时工作情况下的轨道机动,由于发动机工作的时间比轨道飞行周期短得多,因而可以视为是脉冲作用。连续作用机动又称小推力机动,与前者相比,连续作用机动过程中推力比一般火箭发动机小很多,作用时间则长很多。例如电火箭发动机、太阳帆等,其推力只有千分之几牛至数牛,其工作时间与过渡时间可长达数年。还有一种有限推力的连续机动,所用的火箭发动机,仍是通常的化学火箭发动机,但推力较小,机动时间较脉冲机动长但远小于电火箭等的机动时间。被动机动的动力则是外部的自然力,如空气动力和星体引力等。

本章主要研究主动机动中的脉冲机动,因为它的应用最为广泛,对其他机动则只做一般介绍。

脉冲机动,可根据脉冲的数量划分为单脉冲机动及多脉冲机动。

5.2 单脉冲机动(同平面相交轨道间的过渡)

5.2.1 改变轨道形状和轨道平面的单脉冲方法

当推力作用时间与机动过程相比甚小时,可视作用力为脉冲力,力作用期间飞行器至中心星体的距离 r 不变。通常可把圆和抛物线看成椭圆和双曲线的极限情况,因此下面以研究椭圆和双曲线运动为主。所谓单脉冲机动,系指以单个脉冲的作用,改变轨道上运动的飞行器速度(方向或大小),使空间飞行器轨道变更为另一条新轨道或修改原轨道的参数的过程。我们首先研究新旧轨道在同一平面的情况。在 4.1 节中,曾给出当空间某点的矢径 r_0、速度 v_0 和其方向 β_0 给定时,轨道参数的计算方法。然而,该节的公式也适用于空间任意点,可用来进行轨道机动的计算。在 4.1 中,我们曾根据无因次组合 $r_0v_0^2/\mu$ 和 β_0 计算轨道的偏心率 e 和真近角 θ_0 的公式式(4.7) 和式(4.8),略去下标,则有

$$\tan\theta = \frac{(rv^2/\mu)\sin\beta\cos\beta}{(rv^2/\mu)\cos^2\beta - 1} \tag{5.1}$$

$$e^2 = (rv^2/\mu - 1)^2\cos^2\beta + \sin^2\beta \tag{5.2}$$

这是已知 r、v、β 计算空间飞行器轨道的表达式，也可用来计算新的轨道，即机动后的新 θ 值和 e 值。如果机动后的轨道 θ 角不变（轨道长轴方向不变），还可以由式(5.1)计算 β 与 v 的关系

$$\frac{rv^2}{\mu} = \frac{1}{\cos^2\beta - \sin\beta\cos\beta\cot\theta} \tag{5.3}$$

这正是图4.3和图4.4中的 θ 等值线。若希望机动之后的轨道保持偏心率 e 不变，则可从式(5.2)寻求 β 与 v 的关系

$$\frac{rv^2}{\mu} = \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{\cos^2\beta}}\right) \tag{5.4}$$

它是图4.3和图4.4中的 e 等值线，是双值的，两者的取舍根据具体情况而定。

应说明的是上述四方程对于各类圆锥曲线轨道都是适用的，当求得 θ 和 e 之后，再加上原有已知量，可完全决定轨道的各个参数。为了今后应用方便，下面给出求导长半轴 a 的方程，由式(3.38c)和式(3.61b)可求得

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2 - (rv^2/\mu)} \qquad \text{椭圆轨道} \tag{5.5}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{(rv^2/\mu) - 2} \qquad \text{双曲线轨道} \tag{5.6}$$

【例1】 卫星轨道（图5.1）参数如下：$e_1 = 0.39$，在 $r = 8\,600$ km 有 $\theta = 81.2°$。当空间飞行器运行到 $\theta = 120°$ 时，使拱点线在同平面内沿飞行器运动方向旋转 20°，而 e 变为 0.6，试求所需的速度增量和旋转后轨道的形状及参数。

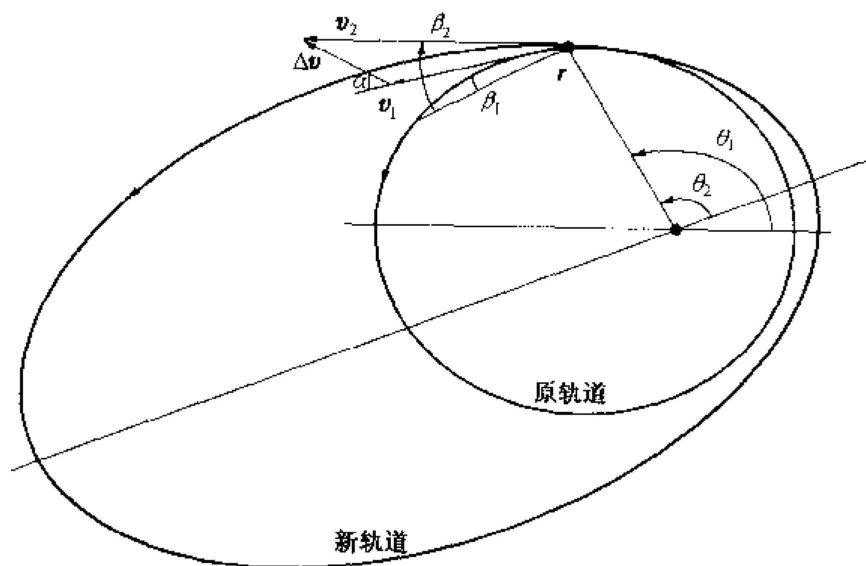


图5.1 新旧轨道的关系

【解】 机动变轨之前，以 $\theta = 81.2^\circ$，$r = 8\ 600$ km 和 $e = 0.39$ 代入

$$p = r(1 + e\cos\theta) = 9\ 113.1\ (\text{km})$$

求得 p 值。所以在 $\theta = \theta_1 = 120^\circ$ 时，有矢径

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta_1} = 11\ 322\ (\text{km})$$

从图 4.3 或应用式(5.1)、式(5.2)，根据 $\theta_1 = 120^\circ$ 和 $e = 0.39$，得到 $\beta_1 = 21.3^\circ$ 和 $r_1 v_1^2/\mu = 0.95$，因此在 θ_1 点的速度是

$$v_1 = \sqrt{0.95\frac{\mu}{r_1}} = 5.78\ (\text{km/s})$$

据题意，机动之后，新轨道的长轴顺卫星运动方向转过 20°，因此对新轨道，卫星在机动的瞬间应有真近角 $\theta_2 = \theta - 20^\circ = 100^\circ$，(见图 5.1)。再根据 θ_2 和 $e_2 = 0.6$，从图 4.3 或以式(5.1) 和式(5.2) 计算，得

$$\frac{r_1 v_2^2}{\mu} = 1.286, \beta_2 = 33.4^\circ$$

因此求得

$$v_2 = \sqrt{1.286\frac{\mu}{r_1}} = 6.73\ \text{km/s}$$

新轨道的半长轴由式(5.5) 计算得

$$\frac{a}{r_1} = 1.4$$

速度增量可从图 5.1 求得

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2\cos(\beta_2 - \beta_1)} = 1.55\ \text{km/s}$$

Δv 的方向由余弦定理

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{v_1^2 + \Delta v^2 - v_2^2}{2v_1\Delta v}$$

求得 $\alpha = 57.7^\circ$。新旧两轨道见图 5.1。

当新旧两轨道在不同平面时，应该同时完成轨道平面和轨道形状的改变，所需要的速度增量(消耗的能量)才是最少的。因此下面单独分析以单个脉冲改变轨道平面的方法。如两轨道不共面，则这两平面必有一交线(图 5.2)，而用单个脉冲从旧平面向新平面过渡，只能在上述两平面交线上的两点(图中的(a) 或(b)) 完成。设取其中的 a 点。前已约定新、旧两轨道形状不变，故新轨道该点的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 和旧轨道同一点的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 数值应该相等，那么由 $\boldsymbol{v}_1$ 改变成为 $\boldsymbol{v}_2$，所需的速度增量应是

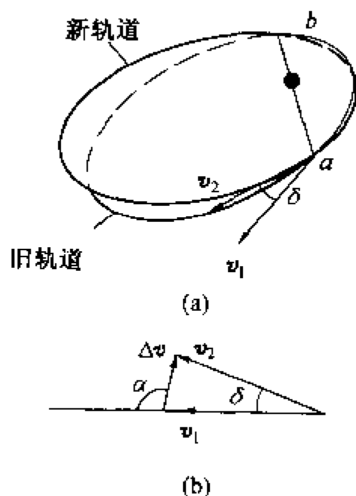


图 5.2　轨道面的过渡

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$$

即

$$\Delta v = 2v_1\sin\frac{\delta}{2} = 2v_1\cos\beta\sin\frac{\Delta i}{2} \tag{5.7}$$

$$\alpha = 90° + \frac{\delta}{2} \tag{5.8}$$

其中，δ 是两速度间夹角，它与两轨道平面间的夹角 Δi 之间的关系是 $\sin\frac{\delta}{2} = \cos\beta\sin\frac{\Delta i}{2}$。由式(5.7)易知，为节省能量，应尽量选择水平速度 $v_1\cos\beta$ 小的点做改变轨道平面的机动，即在 a 和 b 两可能的过渡点中，选择飞行器与中心星体距离远的点。

5.2.2　单脉冲机动的能量消耗

首先以齐奥尔科夫斯基公式(见附录2)给出速度增量 Δv 与消耗的燃料质量 Δm 间的关系

$$\Delta v = w\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m}\right)$$

或

$$\Delta m = m_0(1 - e^{-\frac{\Delta v}{w}}) \tag{5.9}$$

式(5.9)表明，速度增量 Δv 和消耗的燃料质量 Δm 成比例。为了减小消耗的燃料(也减少了运载飞行器的载荷)，应选取尽可能小的机动速度增量 Δv，和尽量大的燃料喷出速度 w。

当轨道平面不改变，只改变轨道形状时，速度增量 Δv 也在同一平面之中，它又可分解为沿轨道切线和法线两个方向的分量，然而使轨道平面改变的速度增量应是垂直于轨道平面的分量。

先来分析速度增量对轨道形状的影响，为此对式(5.1)两边取微分，考虑到同一位置 r 不变，得

$$d\theta = -\frac{\sin\beta\cos\beta\cos^2\theta}{\left(\frac{rv^2}{\mu}\cos^2\beta - 1\right)^2}d\left(\frac{rv^2}{\mu}\right) + \frac{\left[\left(\frac{rv^2}{\mu}\right)^2\cos^2\beta - \frac{rv^2}{\mu}(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\right]\cos^2\theta}{\left(\frac{rv^2}{\mu}\cos^2\beta - 1\right)^2}d\beta$$

利用式(5.1)和式(4.6)第一和第二式，将上式改造为

$$d\theta = -\frac{2\sin\theta}{e}\frac{dv}{v} + \left(\frac{\cos\theta}{e} + \frac{2\sin^2\beta}{e^2}\right)\frac{rv}{\mu}(v d\beta) \tag{5.10}$$

上式右侧 dv 前的系数是 β 为常值时的速度变化，表示速度切线方向的速度增量；$d\beta$ 项前的系数是速度为常值时的 β 角变化，因此 $vd\beta$ 可视为法向速度分量。先分析切向分量的影响，为此从式(3.38c)、式(3.61b)中求得 v，代入式(5.10)第一项，有

$$d\theta = -\frac{2\sin\theta}{e\sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2(1 + e\cos\theta)}{p} \mp \frac{1}{a}}}dv \tag{5.11}$$

负号用于椭圆，正号双曲线轨道。上式中的变量只有 v 和 θ，易知，在 $\theta = 0$ 和 π 两点施加切向速度增量时，轨道的长轴不旋转($\sin\theta = 0$ 之故)。而对其右侧分式取对 θ 的导数，并令其为零，还可得该分式的最大值，所对应的

$$\cos\theta = -e \quad (\text{椭圆轨道}) \tag{5.12a}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{e} \quad (\text{双曲线轨道}) \tag{5.12b}$$

这表明当满足式(5.12a)或式(5.12b)时，相同的切向速度增量会造成最大的半长轴的角度旋转。这样的点显然有两个，对于椭圆它们位于短半轴上，但对于双曲线，它们位于无穷远(见式(3.58))。

由式(3.38c)和式(3.61a)还可以求得速度的变化和半长轴变化量的关系(椭圆轨道用正号，双曲线用负号)

$$\mathrm{d}a = \pm\frac{2a^2v}{\mu}\mathrm{d}v \tag{5.13}$$

速度在切向变化引起的偏心率改变，可推导如下。对于椭圆轨道

$$p = \frac{h^2}{\mu} = \frac{r^2v^2\cos^2\beta}{\mu} = a(1-e^2) \tag{5.14}$$

当速度只有切向变化时，β 不变，由上面最后式求导得

$$\frac{2r^2v\cos^2\beta}{\mu}\mathrm{d}v = (1-e^2)\mathrm{d}a - 2ae\mathrm{d}e$$

把式(5.13)代入消去 $\mathrm{d}a$，并以式(5.14)改造后，可求得

$$\mathrm{d}e = \frac{p}{e}\left(\frac{v}{\mu} - \frac{1}{av}\right)\mathrm{d}v \tag{5.15}$$

由式(5.13)和式(5.15)显然可知，对于椭圆轨道，在速度最大点(近心点)施加切向速度增量，半长轴和偏心率的变化量最大。

对于双曲线轨道，由式(3.23)、式(4.1)和式(3.57)，应用和椭圆轨道相同的方法，可以导出

$$\mathrm{d}e = \frac{p}{e}\left(\frac{v}{\mu} + \frac{1}{av}\right)\mathrm{d}v \tag{5.16}$$

其中，$(v/\mu) + (1/av)$ 的值在 $v = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}$ 处，即在无穷远点(见式(3.62))有极大值。再考虑到式(5.13)，易知对于双曲线轨道，也是在近心点施加切向速度增量，半长轴的改变量最大，而切向速度增量使偏心率的变量最大的点，是在无穷远处。

以上研究了切向速度增量对改变轨道形状各参数的影响，至于法向速度增量，虽也能改变轨道的偏心率、半长轴等参数，但至少从式(5.10)可以看出，它的影响比切向速度增量小很多。一般说，它的作用比切向速度增量大约要小一半，因此上面从单纯切向速度增量得出的改变轨道形状最佳位置的结论，只要法向速度增量不过大也是近似正确的。

与轨道平面相垂直的速度增量，主要用于改变轨道平面的方向。如欲改变轨道倾角，那么施加速度增量的位置只有升交点和降交点两个(图4.7)，其中，飞行器轨道速度低的点为最佳点。如欲改变升交点经度 Ω，施加速度的点也只有两个，它们分别在 $\omega + \theta = 90°$ 和 $270°$ 处(图4.7)，仍以飞行器轨道速度低的点为最佳。

上述讨论针对仅仅改变某一参数，如单一的 a、e 或 θ 等，但实际应用中常要求同时改变数个参数，使施加速度增量的点和方向无优化余地，就只好放弃最佳选择了。

5.3　同平面不相交轨道过渡

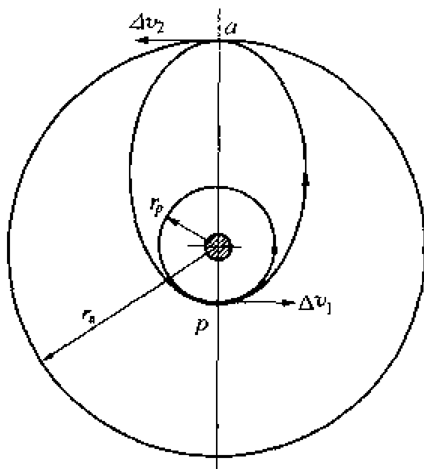


图 5.3　霍曼过渡

霍曼过渡在同一轨道平面中，两不相交轨道之间的过渡，以两圆轨道最为简单。最初给出这种过渡的能量最佳方案者是霍曼(Hohmann)，故又称霍曼过渡。他证明了当 r_a 与 r_p 相差不太大时，两圆轨道之间能量最省的过渡轨道是同时切于两圆的椭圆(图 5.3)。设空间飞行器在半径为 r_p 的圆轨道上运动，希望它移到同平面、半径为 r_a 的圆轨道上来，图示的椭圆就是能量最省的霍曼过渡轨道。显然该椭圆的偏心率是(见式(3.34))

$$e = \frac{(r_a/r_p) - 1}{(r_a/r_p) + 1} \tag{5.17}$$

近地点处应有的速度，已由式(3.47) 给出，是

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \cdot \frac{2r_a/r_p}{1 + (r_a/r_p)}} \tag{5.18}$$

而空间飞行器在半径为 r_p 圆轨道上运行时，速度是

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \tag{5.19}$$

两者之差，就是我们在 p 点应施加的切向速度增量

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}\left(\sqrt{\frac{2r_a/r_p}{1 + (r_a/r_p)}} - 1\right) \tag{5.20}$$

同样空间飞行器沿霍曼轨道运行至远心点 a 时的速度为(见式(3.48))

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \cdot \frac{2}{1 + (r_a/r_p)}} \tag{5.21}$$

而在大圆轨道上运行所需的轨道速度是 $v_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_a}}$，两者差

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_a/r_p)}}\right) \tag{5.22}$$

即为 a 点所需切向速度增量。整个过渡的总速度增量是

$$\Delta v_{\mathrm{T}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}\left[\sqrt{\frac{2r_a/r_p}{1 + (r_a/r_p)}}\left(1 - \frac{r_p}{r_a}\right) + \sqrt{\frac{r_p}{r_a}} - 1\right] \tag{5.23}$$

作为比较，我们考虑从半径为 r_p 的圆轨道上逃逸的问题。此时所需的速度增量是

$$\Delta v_e = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \tag{5.24}$$

如果令式(5.24) 和式(5.23) 相等，将可求得

$$\frac{r_a}{r_p} = 3.4$$

这就说明，两圆轨道的半径比为 3.4 倍时，其霍曼过渡所需的能量与从小圆轨道上逃逸的能量相等。

至于霍曼过渡为何是能量最小的，可证明如下。图 5.4 是区别于霍曼轨道的一种过渡，先设椭圆在 a 点和大圆轨道相切（和图 5.3 一样），而在椭圆和小圆轨道的交点 b 处，速度增量 Δv_1^*，不与小圆相切。如果 v_r 和 v_θ 分别是过渡椭圆上 b 点速度 v_b 的径向和横向分量，v_p 是 b 点圆轨道的速度，Δv_1^* 可由图示几何关系得

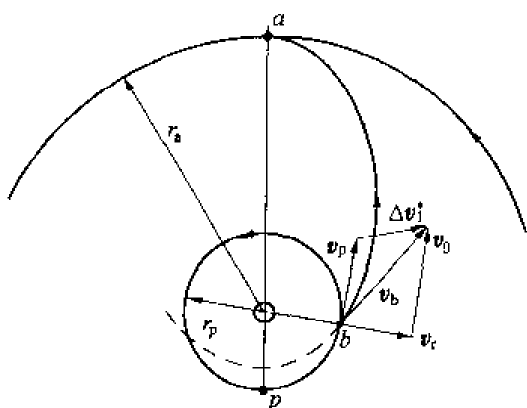


图 5.4 最优证明

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + (v_\theta - v_p)^2$$

其中，$v_\theta = h/r_p$，$v_p = \sqrt{\mu/r_p}$，因此

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + \left(\frac{h}{r_p} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}\right)^2 \tag{5.25}$$

考虑到能量守恒，在 a、b 两点应用式(3.38b)得

$$\frac{1}{2}\left(v_r^2 + \frac{h^2}{r_p^2}\right) - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2r_a^2} - \frac{\mu}{r_a} \tag{5.26}$$

由式(5.26)

$$h^2 = \frac{r_a^2 r_p^2}{r_a^2 - r_p^2}\left[2\mu\frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2\right] \tag{5.27}$$

因 $h^2 \geqslant 0$，显然有

$$v_r \leqslant \sqrt{2\mu\frac{r_a - r_p}{r_a r_p}} = v_{r\max}$$

将式(5.27)代入式(5.25)

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + \left[\frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 - r_p^2}}\sqrt{2\mu\frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}\right]^2 \tag{5.28}$$

式(5.28)对 v_r 求导得

$$\frac{d(\Delta v_1^{*2})}{dv_r} = 2v_r - 2v_r\left[\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_p^2} - \frac{\sqrt{\frac{\mu}{r_p}\cdot\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_p^2}}}{\sqrt{2\mu\frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2}}\right] \tag{5.29}$$

令 $\frac{d(\Delta v_1^{*2})}{dv_r} = 0$，当 $v_r \leqslant v_{r\max}$ 时，只有 $v_r = 0$ 满足条件。且 $\left.\frac{d^2(\Delta^{*2})}{dv_r^2}\right|_{v_r=0} > 0$，$\Delta v_1^{*2}$ 为极小值。

$$(\Delta v_1^{*2})_{\min} = \left[\sqrt{\frac{\mu}{r_p}\frac{2r_a}{r_a + r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}\right]^2 \tag{5.30}$$

$(\Delta v_1^{*2})_{min}$ 与式(5.20)的结果相同,表明 v_b 与 v_p 同向,b 点为 v_b 与小圆的切点。

相同的方法,还可证明,椭圆在远心点和大圆轨道相切时,所需要的变轨速度增量为最小。这就证明了霍曼过渡是能量最省的。不过它是限定自小圆向大圆轨道过渡时,只用两个速度脉冲时获得的,如允许采用三个脉冲速度,结论将有改变。

首先,分析霍曼过渡所需能量与两圆轨道半径比 $\bar{r} = r_a/r_p$ 的关系。为此,以

$$v_{cp} = \sqrt{\mu/r_p}$$

除式(5.23)两侧,得

$$\Delta\bar{v}_T = \frac{\Delta v_T}{v_{cp}} = \sqrt{\frac{2\bar{r}}{1+\bar{r}}}\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} - 1 \tag{5.31}$$

求 $d\Delta\bar{v}_T/d\bar{r}$,再令其为零,得

$$3\sqrt{2\bar{r}} + \sqrt{2} - (1+\bar{r})^{3/2} = 0 \tag{5.32}$$

由此求得 $\bar{r} = 15.58$。经计算而知该点的二阶导数为负,说明它所对应的 $\Delta\bar{v}_T$ 为极大,其值为 $(\Delta\bar{v}_T)_{max} = 0.536$(图 5.5)。初看,这一结论难于理解:为什么当 $\bar{r} > 15.58$ 之后,两圆轨道间过渡所需能量会随着轨道半径比的增加而减少?如果进一步分析 $\Delta\bar{v}_1 = \Delta v_1/v_{cp}$ 和 $\Delta\bar{v}_2 = \Delta v_2/v_{cp}$,就不难明白,由图 5.5 看出,$\Delta\bar{v}_1$ 是单调地随 $\bar{r}$ 而上升,最大值趋近于0.414。换言之,使空间飞行器从小圆轨道过渡到椭圆轨道的能量是有限的,即使半长轴达到无穷大,其速度增量也只为 v_{cp} 的 0.414 倍。然而,$\Delta\bar{v}_2$ 却在 $\bar{r} = 5.88$ 处有极大值 $(\Delta\bar{v}_2)_{max} = 0.190$ 然后逐渐减小。换言之,从椭圆轨道过渡到圆轨道的速度脉冲,当超过 5.88 之后是减小的。

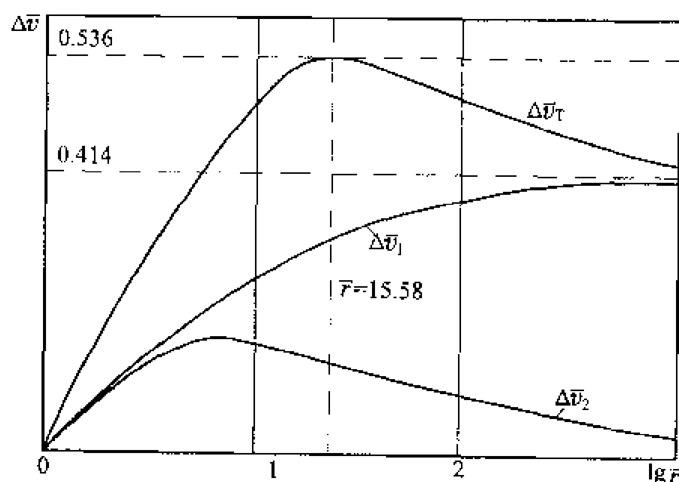


图 5.5　二脉冲过渡的能量

还可以证明:当两圆轨道半径之比 $r_a/r_p > 15.58$ 后,两同平面圆轨道间能量最省的过渡是三脉冲的(如图 5.6),图示以 Δv_1、Δv_2 和 Δv_3 三速度脉冲的过渡,其间增加了一个远心点为 r_c 的中间轨道且有 $r_c > r_a$;而当 $r_a/r_p < 11.94$ 时,二脉冲的标准霍曼过渡为最省;至于 $11.94 < r_a/r_p < 15.58$ 时,轨道过渡依情况或以二脉冲,或以三脉冲为能量最省。

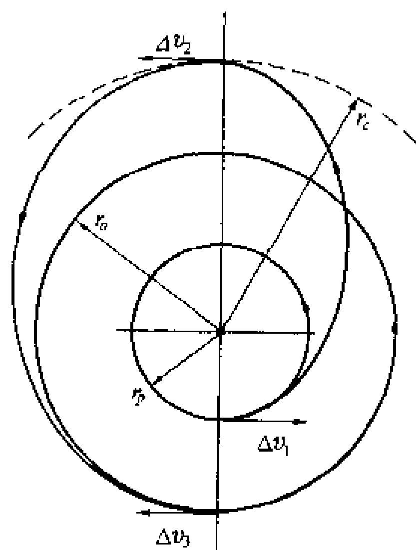


图 5.6　三脉冲过渡

上述结论,在图 5.7 中以区域划分来表示,在区域 I 中以三脉冲过渡为最佳,而除 I 之外的 II 区

域都是二脉冲过渡的最优范围。由图可见，$r_a = r_c$ 线下方均属 Ⅱ 区域，即对于中间半径 r_c 小于 r_a 的情况，无论 r_c 为何值，三脉冲过渡均不如二脉冲好。图 5.7 中表示了当 $r_a/r_p < 11.94$ 时，二脉冲过渡能量最节省；图 5.7 中表示了当 $r_a/r_p > 15.58$ 时，只有 $r_c > r_a$ 才是三脉冲过渡占优势的情况；而在 $11.94 < r_a/r_p < 15.58$ 区间以曲线 C 划分二脉冲和三脉冲的最佳范围，曲线 C 是一条超越函数曲线，其上某些点的 r_a/r_p 和 r_c/r_p 关系如表 5.1。

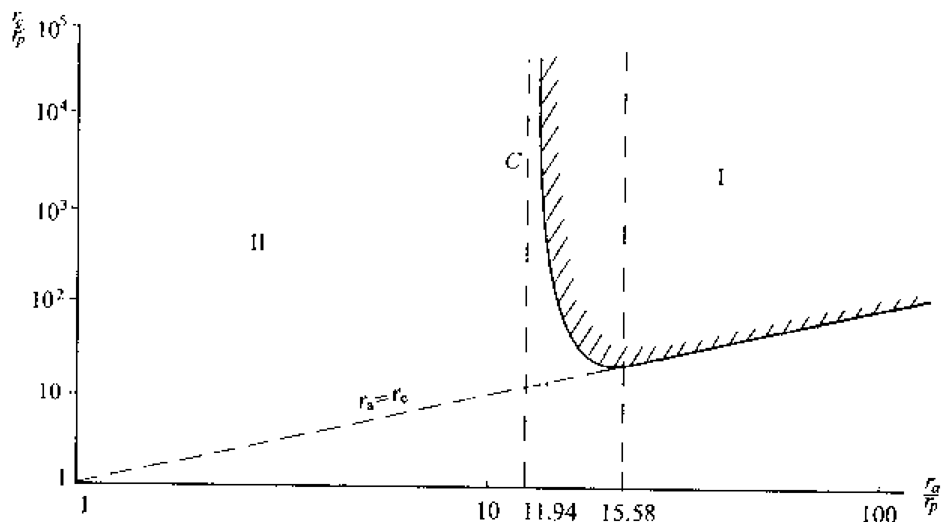


图 5.7　最优区域划分

表 5.1　C 曲线的部分取值

r_a/r_p	11.94	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	15.58
r_c/r_p	39 812.0	816.0	91.6	49.1	34.1	26.4	21.6	18.4	16.1	15.58

同平面两圆轨道之间的过渡，也可从大圆向小圆进行，这时能量最省的方法仍然如上，只是所施加的速度增量与上述的方向相反。

同轴椭圆轨道之间的过渡。图 5.8 有椭圆 1 和 2，我们的任务是使空间飞行器从轨道 1 转移到 2 上。5.2.2 节曾证明单脉冲机动变轨时，在近心点施加速度脉冲，对改变轨道的长半轴和偏心率，其能量最省。对于本情况也是从内部轨道的近心点开始加第一个切向速度增量 Δv_1，沿切于 1 和 2 两椭圆的过渡椭圆轨道至外部椭圆的远心点，再加第二个切向速度增量 Δv_2，是能量最省的过渡。应用和前面相同的原理，可以计算椭圆 1 和过渡椭圆近心点的速度分别是（见式(5.18)）

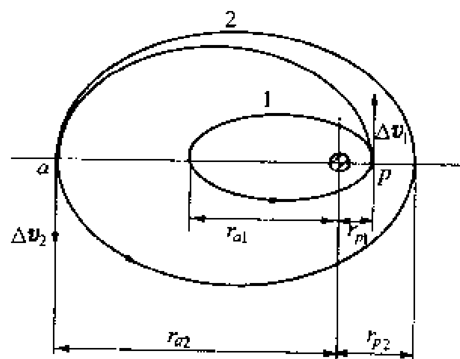


图 5.8　同轴同向椭圆间的过渡

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \cdot \frac{2r_{a1}}{r_{a1} + r_{p1}}} \tag{5.33a}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \cdot \frac{2r_{a2}}{r_{a2}+r_{p1}}} \tag{5.33b}$$

而椭圆 2 和过渡轨道远心点的速度分别是(见式(5.21))

$$v_{a2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}} \cdot \frac{2r_{p2}}{r_{a2}+r_{p2}}} \tag{5.34a}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}} \cdot \frac{2r_{p1}}{r_{a2}+r_{p1}}} \tag{5.34b}$$

所以在 p 点和 a 点的速度增量分别是

$$\Delta v_1 = v_p - v_{p1}, \Delta v_2 = v_{a2} - v_a$$

所需的总速度增量是

$$\Delta v_{\mathrm{T}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 \tag{5.35}$$

5.4　连续作用力下的轨道机动

一般,连续作用的推力装置推力都很小,它们在千分之几牛至数牛之间。在这样小推力的作用下进行轨道机动,所需时间极长,因此进行优化是十分必要的。本节先给出优化的一般理论。设飞行过程以状态方程式描述

$$\dot{\underline{X}} = \underline{f}[\underline{X}(t), \underline{u}(t), t]; \underline{X}(t_0)\text{ 已知}, t_0 \le t \le t_{\mathrm{f}} \tag{5.36}$$

其中,$\underline{X}(t) \in R^{n\times 1}$,$\underline{u}(t) \in R^{m\times 1}$ 分别是 n 和 m 维的状态变量和控制矢量。如果要求在 $t = t_{\mathrm{f}}$ 终点时刻,状态变量 $\underline{X}(t_{\mathrm{f}})$ 满足 q 维的约束条件

$$\underline{\Psi}[\underline{X}(t_{\mathrm{f}}), t_{\mathrm{f}}] = 0 \tag{5.37}$$

并使目标函数在终端时刻 $t = t_{\mathrm{f}}$

$$J = \underline{\Phi}[\underline{X}(t_{\mathrm{f}}), t_{\mathrm{f}}] \tag{5.38}$$

达到极值(极大或极小)。

为导出优化的条件,先把目标函数式(5.38)改写成

$$J = \Phi[\underline{X}(t_{\mathrm{f}}), t_{\mathrm{f}}] + \underline{\nu}^T\underline{\Psi}[\underline{X}(t_{\mathrm{f}}), t_{\mathrm{f}}] + \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} \underline{\lambda}^{\mathrm{T}}(\underline{f} - \dot{\underline{X}})\mathrm{d}t \tag{5.39}$$

由于增添的均为零值,目标函数并未改变。其中 $\underline{\nu} = \underline{\nu}(t) \in R^{q\times 1}$,$\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(t) \in R^{n\times 1}$ 分别是约束条件式(5.37)及状态方程式(5.36)的待定因子。经推导,J 有极值的必要条件是

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}}\right)^{\mathrm{T}}\underline{\lambda} \qquad \lambda_k(t_0) = 0, \qquad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{5.40}$$

$$\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right)^T \underline{\lambda} = 0 \tag{5.41}$$

$$\underline{\lambda}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}}) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{X}} + \underline{\nu}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial \underline{X}}\right)_{t=t_{\mathrm{f}}} \tag{5.42}$$

再计入式(5.36)和式(5.37),最优化的问题便可求解了。其中式(5.36)和式(5.40)共 $2n$ 个微分方程式,式(5.42)和 $\lambda_k(t_0)$(或为 $\underline{X}(t_0)$ 给定值)是解这 $2n$ 个方程的边界条件,

式(5.41) 则用以求得 m 维控制 $\underline{u}(t)$。

用上述原理推导同平面两圆轨道间的过渡(图 5.9),有如下结果:若有一飞行器欲从轨道 $r(0)$ 过渡到 $r(t_f)$,变轨发动机推力为 $\boldsymbol{P}$,其姿态角为 ϕ,飞行器在矢径 $\boldsymbol{r}(t)$ 方向及垂直方向的速度分量分别是 v_r 和 v_θ,如果空间飞行器的瞬时质量为 $m(t)$,燃料耗量为 $\dot{m}$ = const, 则空间飞行器的运动方程式,可参考式(3.16) 写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P}/(m(t_0) - \dot{m}t) \qquad \text{(a)}$$

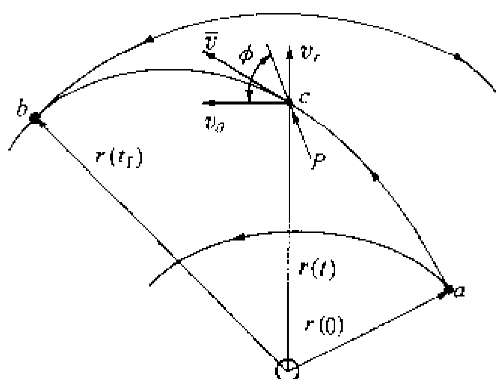


图 5.9　连续推力过渡

其中,推力 $\boldsymbol{P}$ 可分解为

$$\boldsymbol{P} = P\sin\phi\,\boldsymbol{r}_0 + P\cos\phi\,\boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{(b)}$$

$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$,分别是矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向和与其垂直在运动平面内指向前方(横向) 单位矢量。若再添加与轨道平面垂直的单位矢量,它们将构成一活动正交坐标系的三个基矢,该活动坐标系固联在空间飞行器矢径上,随其运动。在此活动坐标系内,矢径 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 的分量形式是

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{r}_0 + v_\theta\boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{(c)}$$

利用附录 5 中单位矢量在活动坐标系内求导的原理,可求得加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_r\boldsymbol{r}_0 + \dot{v}_\theta\boldsymbol{\theta}_0 + v_r\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_0 + v_\theta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}_0$$

这里 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}_0$ 或 $\boldsymbol{\omega} = \frac{v_\theta}{r}\boldsymbol{k}_0$,代入上式,并考虑到单位矢量的叉乘法则,有

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r}\right)\boldsymbol{r}_0 + \left(\dot{v}_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r}\right)\boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{(d)}$$

把式(b)、(c) 第一式和(d) 代入(a),可求得飞行器运动状态方程式

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = v_r \qquad (5.43a)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{P\sin\phi}{m(t_0) - \dot{m}t} \qquad (5.43b)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{P\sin\phi}{m(t_0) - \dot{m}t} \qquad (5.43c)$$

显然,r、v_r 和 v_θ 分别是状态变量 x_1、x_2 和 x_3,其初始条件是

$$r(t_0) = r(0) \qquad (5.44a)$$

$$v_r(t_0) = 0 \qquad (5.44b)$$

$$v_\theta(t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{r(0)}} \qquad (5.44c)$$

而 $t = t_f$ 时的约束是

$$\Psi_1 = v_r(t_f) = 0 \qquad (5.45a)$$

$$\Psi_2 = v_\theta(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} = 0 \qquad (5.45b)$$

如果,我们希望在规定时间($t_f - t_0$)之内,将空间飞行器运送到尽可能远的圆形轨道(半径为 $r(t_f)$)去,目标函数可取为

$$J = r(t_f) \tag{5.46}$$

因 $\dot{m}$ 为常值,故 P 为常值,则控制变量便只有 $\phi = \phi(t)$ 了

应用式(5.40)、式(5.41)和式(5.42),得

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_r &= -\lambda_{v_r}\left(-\frac{v_\theta^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_{v_\theta}\frac{v_r v_\theta}{r^2} \\
\dot{\lambda}_{v_r} &= -\lambda_r + \lambda_{v_\theta}\frac{v_\theta}{r} \\
\dot{\lambda}_{v_\theta} &= -\lambda_{v_r}\frac{2v_\theta}{r} + \lambda_{v_\theta}\frac{v_r}{r} \\
(\lambda_{v_r}\cos\phi &- \lambda_{v_\theta}\sin\phi)\frac{P}{m(t_0) - \dot{m}t} = 0
\end{aligned} \tag{5.47}$$

后式还可写成

$$\tan\theta = \frac{\lambda_{v_r}}{\lambda_{v_\theta}} \tag{5.48}$$

由式(5.42)还可求得

$$\lambda_r(t_f) = 1 + \nu_2\frac{\sqrt{\mu}}{2[r(t_f)]^{3/2}} \tag{5.49a}$$

$$\lambda_{v_r}(t_f) = \nu_1 \tag{5.49b}$$

$$\lambda_{v_\theta}(t_f) = \nu_2 \tag{5.49c}$$

六个微分方程式(5.43)和式(5.47)的解,需借助式(5.44)和式(5.49)六个边界条件。前三个是初值条件,而后三个是终值条件,故是两点边值问题。所决定的解还应满足式(5.45a)和式(5.45b),其控制变量得由式(5.48)求出。对于 $\frac{P/m(t_0)}{\mu/r^2(0)} = 0.1405$,$\frac{\dot{m}\sqrt{\mu/r(0)}}{P} = 0.533$,$\frac{t_f}{\sqrt{r^3(0)/\mu}} = 3.32$的情况,Kopp 和 McCll 曾进行了计算[1,2],他们计算了地球轨道至火星轨道,若推力 $P = 3.782$ N(= 0.85 lb),燃料消耗 $\dot{m} = 5.851$ kg/d(= 12.9 lb/d),则飞行日期为 193 d,其推力矢量方向的变化,如图 5.10 所示,即在前半程作加速运动,后半程为减速。值得指出的是,如用霍曼过渡,自地球飞行火星,需时 258.9 d(见表 6.1),比连续推力情况还长些。

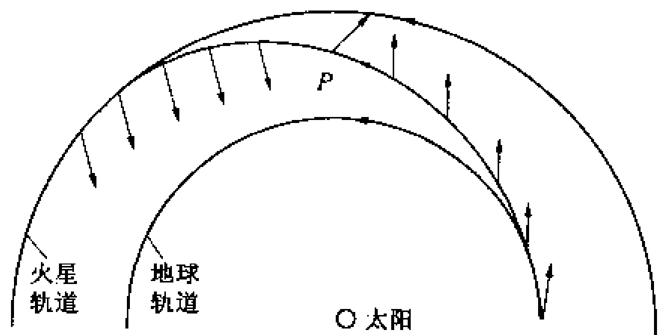


图 5.10　连续推力向火星轨道飞行

5.5 空间飞行器的拦截

两相同或不同轨道上的飞行器，如欲使它们在某指定点相会在一起(速度不要求相同)，就是拦截的问题。

5.5.1 圆形轨道上的拦截

假如两空间飞行器在同一圆轨道上运行(图5.11)，前面的飞行器在 B 点，称为目标飞行器或 B 飞行器，后面的在 A 点，称追踪飞行器，又称 A 飞行器，两者之间相对于圆轨道的中心有一角距 ϕ_{AB}，如欲使飞行器 A 在 C 点追上飞行器 B，A 应沿什么轨道飞行便是本节要研究的问题。

问题的解法如下。由于是在圆轨道上运动，各点的飞行速度均等，因此目标飞行器自 B 点飞至 C 点的时间可由式(3.29)算得为

$$t_{BC} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}\frac{\phi_{BC}}{2\pi} = \phi_{BC}\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \tag{5.50}$$

图5.11 圆轨道上的拦截

显然，只有追踪飞行器也在同样的时间内由 A 运动到 C 点，两者才能在 C 点相会。然而 A 至 C 的距离却远于 B 至 C，追踪飞行器必须以非圆轨道飞行才能按时达到，那就是椭圆、双曲线或抛物线轨道之一。无论是沿何种轨道追踪，有一点是必然的，即作角的平分线 OP，该线与追踪轨道的交点 P 一定是近心点，这是因为 $OA = OC$ 的缘故，而且近心点附近速度较大，利于追赶其他飞行器。由此可知，从 A 经 P 到 C 点的飞行时间应等于从 A 到 P(或从 P 到 C)时间的两倍。而 A 至 P(或 P 至 C)点的运动时间可从式(3.37)及式(3.41)或从式(3.43)求出(对于椭圆轨道)，也可从式(3.68)得到(对于双曲线轨道)。在上述计算中，应知道椭圆或双曲线轨道的偏心率 e，和根据 e 计算出半长轴 a。这是一个反复验算的过程，应进行到 A 至 P(或 P 至 C)点时间的两倍与 t_{BC} 相等为止。应用上述方法确定了追踪飞行器的 e 和 θ，便可以根据式(4.7)和式(4.8)求得 β 和 rv^2/μ 无因次参数，进而确定 Δv_1。

【例1】 若两飞行器在同一圆轨道上运动，半径 $r = 20\,000$ km，A 和 B 相距为 $40°$，如果令 B 再飞行 $120°$，A 与 B 飞行器相会，试求 A 飞行器应有的追踪轨道和速度增量。

解 根据题意：$\phi_{BC} = 120° = 2.094\,4$，$\phi_{AB} = 40° = 0.698\,13$，而

$$\theta = \frac{\phi_{AB} + \phi_{BC}}{2} = 80°$$

飞行器 B 飞至 C 点的时间是

$$t_{BC} = \phi_{BC}\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 9\,382.85\ (\mathrm{s})$$

飞行器 A 飞至 C 点时间应恰与 t_{BC} 相等，这可应用迭代法计算得到。首先，给定一个 e 值，用式(3.39)计算半长轴 a(如为椭圆轨道)

$$a = r(1 + e\cos\theta)/(1 - e^2)$$

再以式(3.43)或式(3.37)及式(3.41)计算 A 飞行器由 A 飞至 P 的时间 t_{AP}，它的两倍应等于 t_{BC}。当设 $e = 0.6$ 时，算得

$$a = 34\,505.9\ \mathrm{km}$$

$$t_{AP}=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]=$$

$$3\ 719.73\ \text{s}<\frac{t_{BC}}{2}=4\ 692.92\ \text{s}$$

试用 $e=0.4$,得

$$a=25\ 463.3\ \text{km}$$

$$t_{AP}=4\ 293.03\ \text{s}<t_{BC}/2$$

继续更改 e 值,直至 $e=0.295$ 时,有

$$a=23\ 028.58\ \text{km}$$

$$t_{AP}=4\ 675.32\ \text{s}\approx t_{BC}/2=4\ 692.92\ (\text{s})$$

可取最后这组数值作为准确解。

然后,根据 $e=0.295,\theta=80°$,利用式(4.7)和式(4.8)或图4.3,求得,$rv_A^{*2}/\mu=1.2$,$\beta=20°$,从而计算出(图5.11和图5.12)A 飞行器的追踪速度是

$$v_A^*=\sqrt{\frac{1.2\mu}{r}}=\sqrt{\frac{1.2\times3.986\times10^5}{20\ 000}}=4.89\ (\text{km/s})$$

而 A 在原先圆轨道上的速度是

$$v_A=\sqrt{\frac{\mu}{r}}=\sqrt{\frac{3.986\times10^5}{2\ 000}}=4.46\ (\text{km/s})$$

所以

$$\Delta v_1=\sqrt{v_A^2\sin^2\beta+(v_A^*-v_A\cos\beta)^2}=1.68\ (\text{km/s})$$

而 Δv_1 相对 v_A 的夹角是

$$\sin\alpha=v_A^*\frac{\sin\beta}{\Delta v_1}=0.995\ 5$$

$$\alpha=84.57°$$

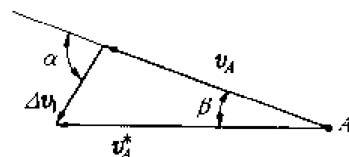


图5.12　速度关系

假如用椭圆轨道的时间方程式,不能求得拦截条件,得改用双曲线时间方程,以相同的方法进行求解。

5.5.2　椭圆轨道上的拦截

如果飞行器 A 和 B 运行在同一轨道(椭圆(1))上,B 在 A 前 ϕ_{AB} 角处,A 如欲在 C 点拦截 B 飞行器,它应循椭圆或双曲线轨道(2),以相同的时间到达 C 点(图5.13)。

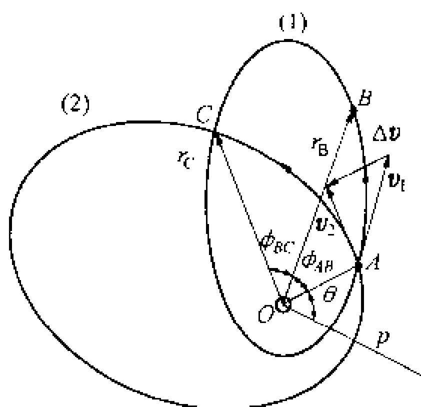


图5.13　椭圆轨道上的拦截

本情况和前例所不同的是 $r_A\neq r_C$,因此追踪轨道近心点不在 $\angle AOC$ 的平分线上。假如它在某处,记为 p 点(如图5.13所示),那么 A 至 P 的真近角 θ 为未知。拦截的过程计算如下:首先利用式(3.37)和式(3.41)(或式(3.43)),计算飞行器 B 飞到 C 点所需的时间间隔 t_{BC}。再设 A 的追踪轨道为椭圆,偏心率为 e',利用轨道

方程式(3.24),对于 A 和 C 两点可以写出

$$r_A = \frac{p}{1 + e'\cos\theta}, r_c = \frac{p}{1 + e'\cos(\phi_{BC} + \phi_{AB} + \theta)}$$

因此,求得

$$e' = \frac{(r_c/r_A)}{\cos\theta - (r_c/r_A)\cos(\phi_{BC} + \phi_{AB} + \theta)} \tag{5.51}$$

只要给定 θ 角即可求得 e',还可代回原式求 p,并利用式(3.33) 得 a。

再次,根据 e'、θ 和 a 利用式(3.37) 和式(3.41)(或式(3.43))计算飞行器 A 由 A 点至 C 点的飞行时间 t_{AC}。如 $t_{AC} \neq t_{BC}$,则调整 e'、θ 的数值,重复计算 t_{AC},反复进行直至 $t_{AC} = t_{BC}$ 为止,最后一组参数就是满足拦截条件的参数。

追踪飞行器的速度增量和它的方向计算方法同前,不赘述。

如以椭圆轨道追踪找不到满足拦截要求的答案,可改用双曲线轨道,计算方法同上,只是计算追踪时间 t_{AC} 应改用式(3.68)。

5.5.3 非同平面轨道的拦截

如目标飞行器 B 和追踪飞行器 A 分别在 T_1 平面的(1) 轨道和 T_2 平面的(2) 轨道上飞行(图 5.14),如不改变 A 的轨道平面使它拦截 B 飞行器,则拦截点只有 T_1 和 T_2 交线与(1)轨道的两个交点 C 和 C',而拦截问题将可化为和前述圆轨道和椭圆轨道拦截相同的问题,即速度增量 Δv 是在 T_2 平面中,使自 A 至 C(或 C')和 B 至 C(或 C')的飞行时间相同。

假如对于图 5.14 的情况,我们希望 A 飞行器在 T_1 和 T_2 两平面交线上 C 或 C' 点以外拦截,如 C_1 点,那么追踪飞行器将不是在原轨道平面内飞行,而是在另一新平面中。图 5.15 示出了拦截轨道平面求取的方法。做中心星体 O 与 A、C_1 两点的连线,并向两侧延长,得和 ae 和 bd 两条直线段,它们必然分别在 T_2 和 T_1 平面,同时也必然在追踪轨道平面上,因而

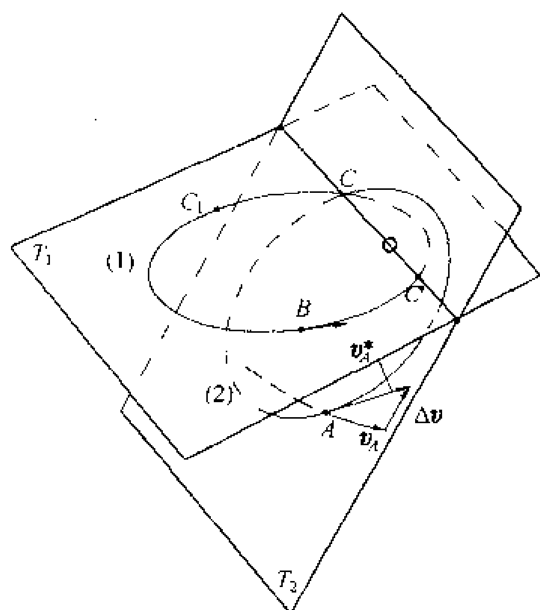


图 5.14 异面轨道上的拦截

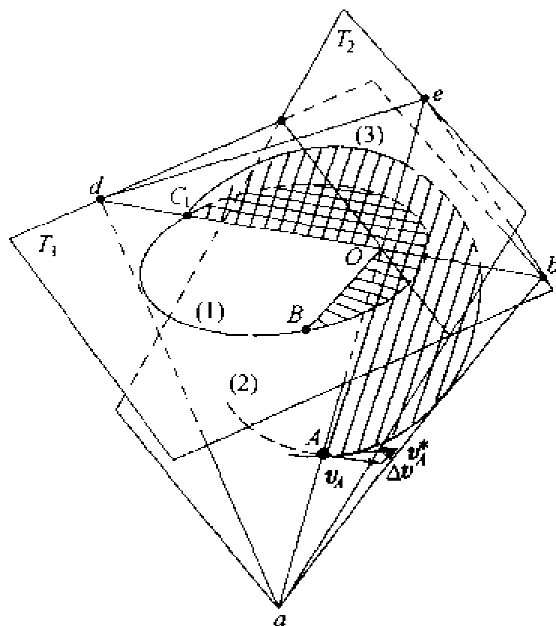


图 5.15 异面拦截的轨道面

就是 T_2、T_1 平面与追踪轨道平面的交线。连 $abcd$ 四点即得追踪轨道平面，在该平面内做过 AC_1 两点的椭圆或双曲线(3)便是拦截的可能轨道，经过和前面类似的反复逼近，将可求得满足 $t_{AC_1} = t_{BC_1}$ 条件的真实拦截轨道。

5.6　气动力辅助轨道转移

所谓气动力辅助轨道转移，就是把脉冲推力变轨和利用星球周围大气层产生的空气动力改变轨道两种方法结合起来的变轨方法。

由于利用气体动力，空间飞行器应该是一个升力体或是带有翼面的飞行装置(例如类似于航天飞机的飞行器)，它应具有规定数值的升力阻力比 F_y/F_x，还应该可以在大气中调节飞行姿态，以获得不同数值的升力、侧力及阻力来灵活调节飞行轨道和速度。此外，由于空间飞行器要以轨道速度进出大气层，它必须具有防热结构或防热层，以防飞行器被烧毁。

我们还得补充给出空间飞行器在大气层内飞行的运动方程式，在第二章中曾分析过运载火箭在大气层内的飞行，但那里因火箭推力 P 远大于运载火箭绕中心星体飞行的离心力，因而将后者忽略。而本节中，气动力和离心力数值上大体相同，必须把它们计入。图 5.16 以 O 为心的圆是中心星体，当飞行器运行到 A 点时，它的速度 $\boldsymbol{v}$ 与切线 τ 重合，阻力 F_x 和它方向相反，升力 F_y 沿法线 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向，向外为正。$\boldsymbol{v}$ 可以写成

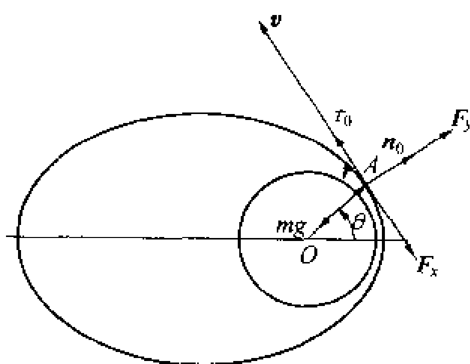


图 5.16　气动力的分量

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}_0$$

其中，$\boldsymbol{\tau}_0$ 为切线 τ 的单位矢量，对上式求时间导数，利用附录 5 的有关式，应有

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau}_0 + v\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}_0 \tag{5.52}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}$ 是 $\boldsymbol{\tau}_0$ 或矢径 $\boldsymbol{r}$ 在惯性空间的旋转角速度，在图 5.16 中显然它是垂直于轨道平面指向上方的，所以有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}_0 \tag{5.53}$$

$\boldsymbol{k}_0$ 是垂直于轨道平面指向上方的单位矢量。其中的 ω 可以用图 5.17 的几何关系求得。当飞行器在 A 点时，有速度 $\boldsymbol{v}$，它与当地水平线成 β 角。经 Δt 时间后，飞至 A' 点，其速度与当地水平线夹角成为 $\beta + \Delta\beta$，而水平线则旋转了 $\Delta\theta$ 角，因此速度相对绝对空间(中心星体)转过的角度 $\Delta\delta$ 是

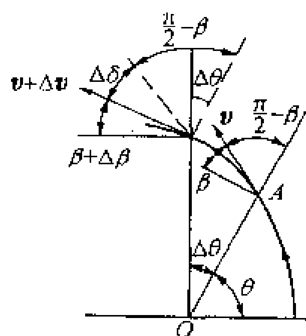


图 5.17　几何关系

$$\Delta\delta = \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \Delta\beta\right) - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \Delta\theta\right] = -\Delta\beta + \Delta\theta$$

因此，角速度是

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta t} = -\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \tag{5.54}$$

把式(5.54)代入式(5.52)，应用单位矢量叉乘的法则，并考虑到

$$\dot{\theta} = r\dot{\theta}/r = v/r\cos\beta$$

便有

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt}\tau_0 + \left(v\frac{d\beta}{dt} - \frac{v^2\cos\beta}{r}\right)n_0 \tag{5.55}$$

从式(5.55)求出 τ_0 和 n_0 方向的加速度分量，再从图 5.16 求出 τ_0 方向的气动力及重力分量$(-F_x - \frac{\mu}{r^2}m\sin\beta)$和 n_0 方向这两力的表达式$(F_y - \frac{\mu}{r^2}m\cos\beta)$，设空间飞行器质量为 m，然后应用牛顿第二定理将它们联系起来，即得空间飞行器在大气内飞行时运动方程式在切线和法线方向的分量形式

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_x}{m} - \frac{\mu}{r^2}\sin\beta \tag{5.56a}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{F_y}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\mu}{r^2 v}\right)\cos\beta \tag{5.56b}$$

还有运动学关系式

$$\frac{dr}{dt} = v\sin\beta \tag{5.56c}$$

式(5.56a)～式(5.56c)共三个方程式，自变量亦恰为三个(v,r,β)，方程封闭可解。

式(5.56a)、式(5.56b)和式(2.2)前二式是相同的，只是这里将 g 代为 μ/r^2，略去了推力 P，但引入了离心力 mv^2/r。它们和式(5.43b)、式(5.43c)也是一致的，只是后两式是在矢径 r 方向和横向推导的力平衡条件，这是因为未考虑空气动力，那样做比较方便。

下面以从地球高圆轨道向低圆轨道过渡为例，说明气动力辅助变轨的实质和优点[3]。空间飞行器原在以 r_a 为半径的大圆轨道上运行，欲使它过渡到半径为 r_p 的小圆轨道(图 5.18)。当飞行器运动到 a 点时朝速度的反向加一速度脉冲 Δv_1，使它沿椭圆轨道降至地球大气层边界 b(一般认为地球大气边界高度为 150 ～ 200 km 左右)。然后飞行器利用调节升力 F_y 的大小控制飞行器在大气层内的飞行，并使之在 c 点冲出大气。同时在 c 点再施加第二个脉冲速度 Δv_2，则飞行器将沿另一椭圆轨道运动到半径为 r_p 的小圆轨道，再加第三个速度脉冲 Δv_3，便完成了全部过渡。上述飞行过程中，如在 c 点飞行器有足够的速度，可以达到 r_p 圆的高度，也可以不施加 Δv_2。整个飞行过程中，进入 b 点时的速度大小和β角数值是重

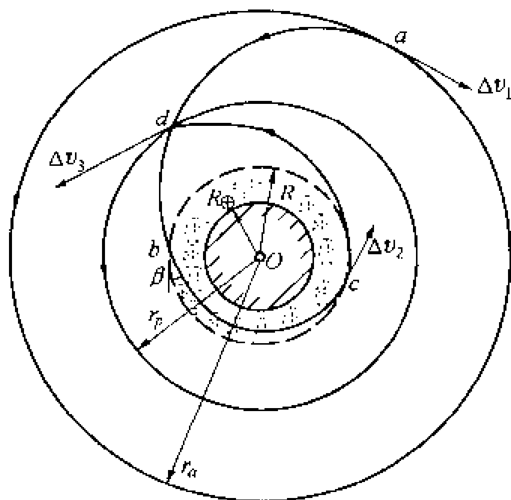


图 5.18　气动辅助变轨的过程

要的参数，选择不当甚至会使飞行器因消耗能量过多而不能再次冲出大气。因此在 b 至 c 的大气飞行过程中，选择升力控制方案，使飞行器合理消耗动能，最大可能地节约燃料，则是气动力辅助变轨中最为核心的问题，这里又得应用最优化技术。

下面通过一简单情况，或称理想情况，对比气动辅助变轨和霍曼过渡所需燃料的多少(图 5.19)。所谓理想情况，即设大气层处在以 R 为半径的圆内，当飞行器从 r_a 圆轨道降至 R 圆时，速度为 v_b，β 角为零。在大气中消耗能量后从 c 点再次以 $\beta = 0$ 冲出大气，其速度 v_c 刚够沿椭圆轨道达到 r_p 为半径的圆轨道，远地点恰在该圆轨道上。对于这种理想情况只需要两个速度脉冲，即在 a 点的 Δv_1 和 d 点的 Δv_2。

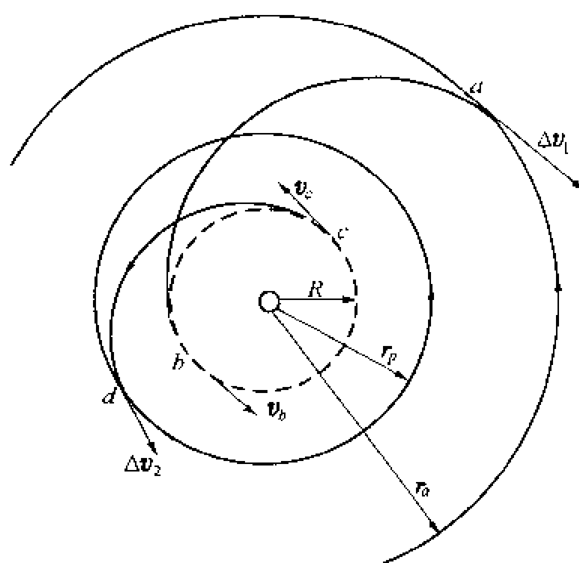


图 5.19　理想状况

根据5.3节中的原理，欲使飞行器在 b 点以 $\beta = 0$ 的速度进入大气，则 Δv_1 应满足

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a}\frac{2}{1+(r_a/R)}}$$

同理，可以求得 d 点的第二个速度脉冲

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}\frac{2}{1+(r_p/R)}}$$

所以，总的速度脉冲是

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a}\frac{2}{1+(r_a/R)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}\frac{2}{1+(r_p/R)}} \quad (5.57)$$

如果以霍曼过渡方式，直接从大圆向小圆过渡，则在 a 和 d 两点所需的速度脉冲是(图 5.20)

$$\Delta v_{1H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a}\frac{2}{1+(r_a/r_p)}}$$

和

$$\Delta v_{2H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}\frac{2r_a/r_p}{1+(r_a/r_p)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}$$

两者之和是

$$\Delta v_{TH} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p}\frac{2r_a/r_p}{1+(r_a/r_p)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a}\frac{2}{1+(r_a/r_p)}} \quad (5.58)$$

为比较式(5.57) 和式(5.58) 的大小，令

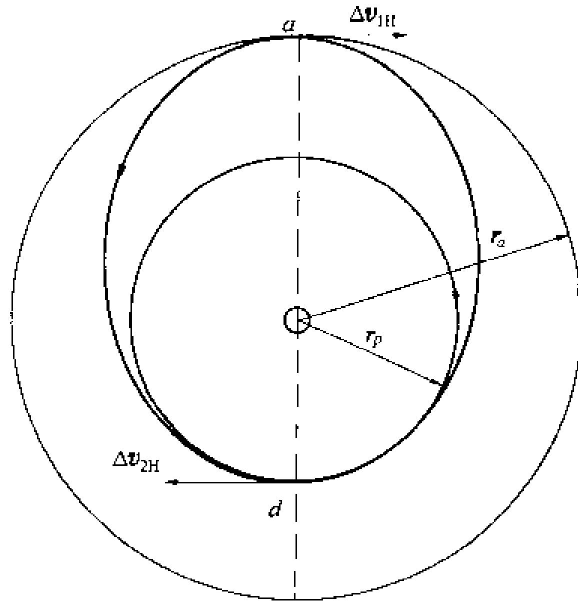


图 5.20　霍曼过渡

$$\bar{r}_a = r_a/R, \bar{r}_p = r_p/R \tag{5.59}$$

则式(5.57) 和式(5.58) 可改写为

$$\Delta v_T = \sqrt{\frac{\mu}{R}}\left[\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_a}}\left(1-\sqrt{\frac{2}{1+\bar{r}_a}}\right)+\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_p}}\left(1-\sqrt{\frac{2}{1+\bar{r}_p}}\right)\right] \tag{5.60}$$

$$\Delta v_{TH} = \sqrt{\frac{\mu}{R}}\left[\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_a}}\left(1-\sqrt{\frac{2\bar{r}_p}{\bar{r}_a+\bar{r}_p}}\right)+\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_p}}\left(\sqrt{\frac{2\bar{r}_a}{\bar{r}_a+\bar{r}_p}}-1\right)\right] \tag{5.61}$$

如令式(5.60) 与式(5.61) 相等,可绘制出一条以 $\bar{r}_a$ 和 $\bar{r}_p$ 为变量的曲线(见图 5.21),表明在这条曲线上两种变轨方式具有相同的能耗。而在曲线的上方有 $\Delta v_T > \Delta v_{TH}$,即在该区霍曼过渡所需能量少于气动力辅助变轨的;而在曲线下方,因 $\Delta v_T < \Delta v_{TH}$,以气动力辅助变轨为最佳。根据计算,从地球静止轨道向 r_p = 6 728 km 轨道过渡,其 Δv_T 比霍曼过渡少 59.86%[3]。从图 5.21 显见,大圆轨道越大,气动力辅助变轨越有利;然而这个结论只对从大圆向小圆轨道过渡才正确,从小圆轨道向大圆轨道过渡则以霍曼过渡为佳。

上面计算的是理想情况,而真实情况中,因大气上层空气稀薄难以获得必要的减速,需更深入大气层才行,这就要求多一些的能量,所以理想情况是节省能量的上限。

至于真实情况,飞行器在大圆轨道上飞行的速度为 $v_a = \sqrt{\mu/r_a}$,若飞行器进入大气时的速度和角度分别为 v_b 和 β_b,则根据动量矩守恒原理,可以写出 $r_a(v_a - \Delta v_1) = Rv_b\cos\beta_b$,其中 Δv_1 是在大圆 a 点施加的速度冲量,因此有

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \frac{R}{r_a}v_b\cos\beta_b$$

同理,还可以写出飞行器冲出大气时的速度 v_c 和角度 β_c 与到达小圆轨道时应施加的速度增量的关系

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \frac{R}{r_p}v_c\cos\beta_c$$

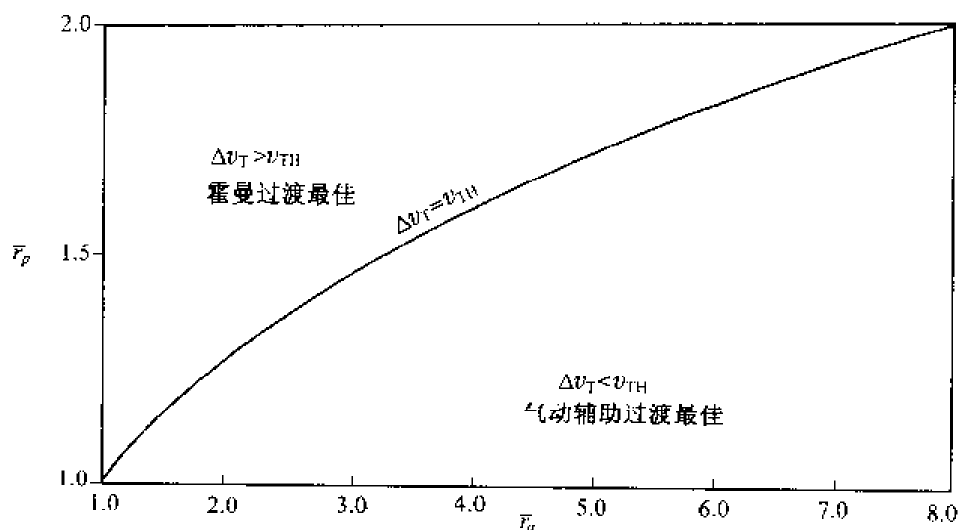


图 5.21　两种过渡方式能耗的比较

我们的目的是使燃料消耗最省，因此，目标函数取

$$J = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \frac{R}{r_a} v_b \cos \beta_b - \frac{R}{r_p} v_c \cos \beta_c \tag{5.62}$$

具体地说，就是变动式(5.56a) ~ 式(5.56c) 中 $F_y = F_y(t)$ 的时间关系，以便得到这样的 v_b，v_c 和 β_b，β_c，它们使 J 达到最小值。而为了达到这个目的，还应添加两个条件，即进入和冲出大气的轨道能量守恒的条件

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \Delta v_1\right)^2 - \frac{\mu}{r_a} = \frac{v_b^2}{2} - \frac{\mu}{R} \tag{5.63}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \Delta v_2\right)^2 - \frac{\mu}{r_p} = \frac{v_c^2}{2} - \frac{\mu}{R} \tag{5.64}$$

优化时，使用了 5.4 节曾用过的最优化原理。

利用上述关系计算了从地球同步轨道向 r_p = 6 558 km 圆轨道的过渡，结果表明气动力辅助变轨所需的总速度增量 $\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2$ 是霍曼过渡的 38.48%[3]。

当然，在计算时未计入为变更 F_y 而消耗的能量。

第六章 行星际间的航行

目前人类只能实现太阳系内行星际间的航行,这是因为太阳系的半径大约是60亿 km,光线还要经历5个多小时才能从中心走到边缘,而离我们最近的半人马星座的距离是4.5光年(光线一年要走9万亿 km),而人造地球卫星绕地球运动的速度大约在7~8 km之间,行星际航行也就是30~50 km/s左右,只是光速的1/6 000,一年才能飞行15亿余公里,实现太阳系内的星际航行已嫌太慢,而飞向其他星系则全无可能,即使我们能以光速之半飞行,到半人马星座尚需8.6年,考虑到往返和加速、减速的时间,飞行一趟就要消磨30年时间,更何况近光速飞行,引起许多相对论问题必得首先解决呢!

6.1 会合周期及发射窗口

从地球飞向太阳系中任何一颗行星,其距离都是遥远的,如向离太阳最近的水星飞行,就超过了2亿 km,节约能量的需求将格外突出。显然以霍曼方式过渡是最为有利的。无论向哪个行星飞行,在霍曼椭圆上运行的时间都是固定的,而当空间飞行器从地球轨道到达该行星轨道时,行星也必须同时到达,才能使空间飞行器与行星相遇。这就出现了向其他行星发射空间飞行器,只能选择地球和该行星处于某固定相对位置的时刻,否则飞行器将不能与行星相遇,称满足这种相对位置要求的时刻为发射时机,又称**发射窗口**,而两次出现发射窗口的时间间隔被称为**会合周期**。

由于各行星绕太阳运行的轨道速度互不相同,越靠近太阳的行星周期越短(表1.1),如以第一次出现发射窗口为时间零点,则随着时间的变化,两行星将以绕太阳旋转的角速度差$(\omega_1-\omega_2)$相对运动,两者间的角度变化量是$\left|\int_0^t(\omega_1-\omega_2)\mathrm{d}t\right|$,当它达到一周时,出现了第二次发射时机。假如认为$\omega_1$和$\omega_2$都是常值,便可求得会合周期的计算式

$$T=\frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \tag{6.1}$$

其中,ω_1和ω_2分别是两行星绕太阳运行的平均角速度。如以这两行星绕太阳一周所需的时间(周期)T_1和T_2代替,则有

$$T=\frac{T_1T_2}{|T_1-T_2|} \tag{6.2}$$

以式(6.2)计算得到的会合周期也列在表1.1中。

由式(6.2)看出,相对速度$(\omega_1-\omega_2)$越小,会合周期越长,这也可以从表1.1中的数据看出,地球与金星及火星的会合周期最长,分别为583.92天和779.94天,与远方行星的会合周期比一年稍多,这是因为远方行星运行周期比地球长很多,近似地认为它们不动,则地球与其相遇的周期便约略等于一年了。

6.2　影响球和圆锥曲线拼合法

准确分析行星际航行需要应用 n 体问题，即把空间有关的星体视为万有引力源，在它们的共同作用下研究空间飞行器的运动。然而至今还没有 $n(n \geqslant 3)$ 体问题的一般解析解。只能依靠数值计算研究有关问题。

不过在做初步分析或精度要求不高时，可以采用一种称为圆锥曲线拼合的方法。它的实质是，将活动空间按各星体的引力大小划分为各自的作用域，称为该星体的**影响球**，在影响球内该星体的引力大于其他星体的，可以略去其他星体的影响，并按前面讲过的两体中心力场的理论进行空间飞行器的计算，进入另一星体的影响球内，就以另一星体为中心体，构成新的二体中心力场问题。

为估计影响球的半径，考察由星体 P_1 和空间飞行器 P_2，及第三星体 P_3 组成的系统，它们的质量分别为 m_1、m_2 和 m_3，它们的相对距离和与惯性参考点 O 的距离见图 6.1。在星体 P_1 和 P_3 的作用下，空间飞行器 P_2 的运动方程式是

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -G\left(\frac{m_1}{r^3}\boldsymbol{r} + \frac{m_3}{d^3}\boldsymbol{d}\right)$$

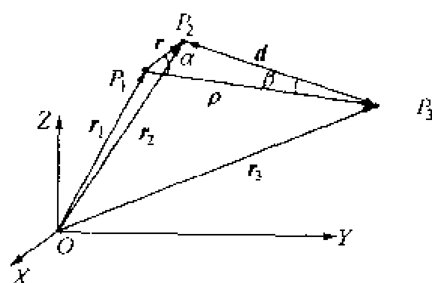


图 6.1　三体系统示意图

星体 P_1 的运动受到星体 P_3 和空间飞行器 P_2 的影响，但因 m_2 远小于 m_3，可略去它的影响，因此有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = G\frac{m_3}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}$$

所以 P_2 飞行器相对 P_1 星体的运动是

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -G\left[m_1\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + m_3\left(\frac{\boldsymbol{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right)\right] \tag{6.3}$$

其中 $Gm_1\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 是中心星体的引力，模为 $Gm_1\frac{1}{r^2}$；由 P_3 造成的干扰力是 $Gm_3\left(\frac{\boldsymbol{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right)$，其模是

$$\text{干扰力} = Gm_3\left[\left(\frac{\boldsymbol{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right)\right]^{1/2} = Gm_3\left(\frac{1}{d^4} + \frac{1}{\rho^4} + 2\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\rho}}{d^3\rho^3}\right)^{1/2} \tag{6.4}$$

由图 6.1 可知

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\rho} = -d\rho\cos\beta$$

因 P_2 是绕 P_1 运动的空间飞行器，而 P_3 是远方的干扰源，应有 $d \approx \rho$，由图 6.1 还可求得

$$\cos\beta = \frac{\rho}{d} - \frac{r}{d}\cos\alpha \cong 1 - \frac{r}{\rho}\cos\alpha$$

和由余弦定理 $d^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\alpha$ 得

$$\cos\alpha = \frac{\rho^2 + r^2 - d^2}{2r\rho} \cong \frac{r}{2\rho}$$

因此,干扰力可写成

$$\text{干扰力} = Gm_3 \frac{r}{\rho^3}$$

而中心星体对飞行器的引力与干扰力之比是

$$\frac{\text{引力}}{\text{干扰力}} = \frac{m_1}{m_3}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \tag{6.5}$$

同理,还可以求得,把 P_3 视为中心星体而 P_1 视为干扰源时,飞行器相对的运动方程式

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = -G\left[m_3 \frac{\boldsymbol{d}}{d^3} + m_1\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right)\right] \tag{6.6}$$

再经与上面类似的推导,并设 r/ρ 的高次方项与 1 相比可以略去,得

$$\frac{\text{引力}}{\text{干扰力}} = \frac{m_3}{m_1}\left(\frac{r}{d}\right)^2 \cong \frac{m_3}{m_1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \tag{6.7}$$

令式(6.5) 和式(6.7) 相等,求得

$$r = \rho\left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{2/5} \tag{6.8}$$

式中 r 是 P_1 和 P_3 影响相等的界限。当 r 小于上式值时是 P_1 的影响区,而 r 大于上述值的区域则应视为 P_3 的影响区域,因此式(6.8) 可以视为影响球半径的计算式。利用式(6.8) 对太阳系各行星(包括月球) 的影响球半径计算的结果见表 1.1。

举例如图 6.2,其中月球的影响区最小,若空间飞行器在此区内,便以月球为中心星体按二体中心力场原理处理,认为其他星体都无影响;若空间飞行器超出月球影响区,而在地球影响区之内,则认为飞行器只受地球的影响;同理,如空间飞行器超出地球影响区,便是太阳的影响区了,此时只考虑太阳的作用,略去其他星体的影响。

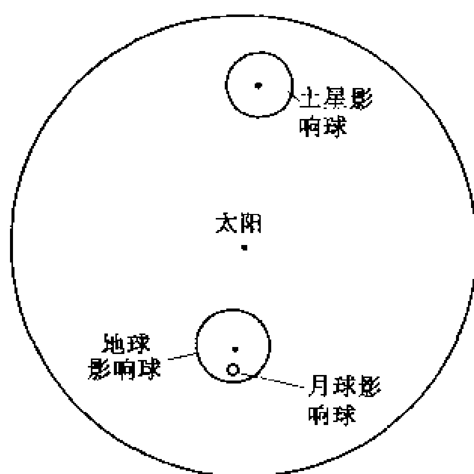


图 6.2　星体的影响球

如果利用影响球的概念分析从地球向土星的飞行,空间飞行器从地球起飞时应按以地球为中心力场的二体问题,使空间飞行器获得至少比逃逸速度大的速度,让它飞出地球影响球,并使它在飞出地球影响球时,具有的速度恰能使飞行器在以太阳为中心力场的二体系统中,沿规定的轨道飞向土星。当空间飞行器进入土星影响球之后,应设法使飞行器减速,达到以土星为中心力场的二体问题所要求的规定轨道运动速度。可见,上述计算是把空间飞行器的完整飞行划分为三段,在每段飞行中,地球、太阳和土星分别轮流成为中心引力场的惟一引力源,另外两个则被略去,因而简化了计算。它们之间的衔接是以前一段的终点状态为下段飞行的初始状态而统一起来的。应注意的是,地球和土星都是绕太阳运动的,而在三段单独计算中,却认为中心星体是静止而求得各运动参数的,这就要求在处理两段衔接点参数时,注意相对运动的关系。上例中,无论在地球、太阳

还是土星的影响球中,空间飞行器的轨道都是圆锥曲线的一种,所以这种分段计算的方法,又被称为**圆锥曲线拼合法**。

6.3　星体的引力摄动

所谓星体引力摄动,是指空间飞行器在某引力场内飞行时穿过(进入再飞出)另一引力场(如在太阳引力场中飞行时穿越某个行星的引力场)后,其速度的变化。这里,后面的引力场可被视为引力摄动源。

首先说明,任何空间飞行器穿过引力摄动源影响球其轨道都是双曲线的。设摄动源是 B 星体,若空间飞行器进入 B 星体影响球边界时相对 B 的速度为零,则根据能量守恒方程式(3.17),它在 B 影响球内的运动速度就是

$$v = \sqrt{\frac{2\mu_B}{r} - \frac{2\mu_B}{R_B}} \tag{6.9}$$

其中,r 和 R_B 分别是空间飞行器距 B 星体的距离和 B 影响球半径,μ_B 是 B 体引力常数。由于 R_B 很大,上式中若略去第二项,式(6.9)表示空间飞行器是以抛物线轨道运动(与式(3.50)比较)。如果空间飞行器到达 B 星体影响球边界时的速度不为零(正常情况均如此),它显然将以双曲线轨道在 B 的影响球内飞行了。

其次要提醒注意的是,当我们处理具有多个星球的问题,并取某一星体作为中心引力体对其应用第二章(两体问题和中心引力场问题)的公式时,式中的速度是相对中心引力体的。这本来是十分明确的,但在本节如处理不当,会产生混淆。

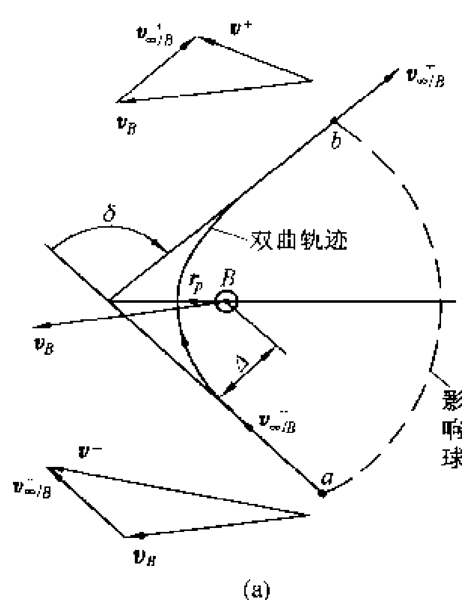
我们把引力摄动分成两类进行研究:空间飞行器从摄动源的前面(图 6.3)和后面(图 6.4)绕飞的情况。

在这两图中,B 是摄动源,它相对参考系的速度是 $\boldsymbol{v}_B$,空间飞行器在 a 点进入其影响球。在进入 B 体影响球前飞行器在参考系中运动,相对参考系的速度为 $\boldsymbol{v}^-$,一旦进入 B 影响球,就要以 B 为中心引力体并绕其飞行,根据上面叙述的道理,为构成以 B 为中心引力体的两体系统,应求出空间飞行器相对 B 的速度。在 a 点此相对速度是(图 6.3 和图 6.4a 点侧旁的速度三角形)

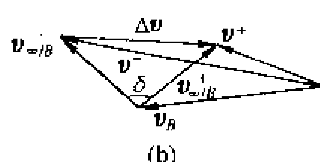
$$\boldsymbol{v}_{\infty/B}^- = \boldsymbol{v}^- - \boldsymbol{v}_B \tag{6.10}$$

这里,上标"+ / -"表示"飞出 / 进入"影响球的点,下标 ∞ 表示在影响球的边界,$/B$ 表示相对 B 星体。当空间飞行器进入 B 影响球之后,便只受 B 星体的引力作用,从渐近线方向进入然后按双曲线轨道运动,从对称的 b 点飞出影响球,回到原参考系。根据对称原理,空间飞行器在 b 点相对 B 摄动源的速度幅值应该和 $\boldsymbol{v}_{\infty/B}^-$ 一样,但方向是沿着另一渐近线的,以 $\boldsymbol{v}_{\infty/B}^+$ 表示。因此,只要确定了双曲线轨道,$\boldsymbol{v}_{\infty/B}^+$,便可用下式算得 b 点处空间飞行器相对原参考系的速度 $\boldsymbol{v}^+$(图 6.3 和图 6.4b 侧旁的速度三角形)

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}_{\infty/B}^+ + \boldsymbol{v}_B \tag{6.11}$$

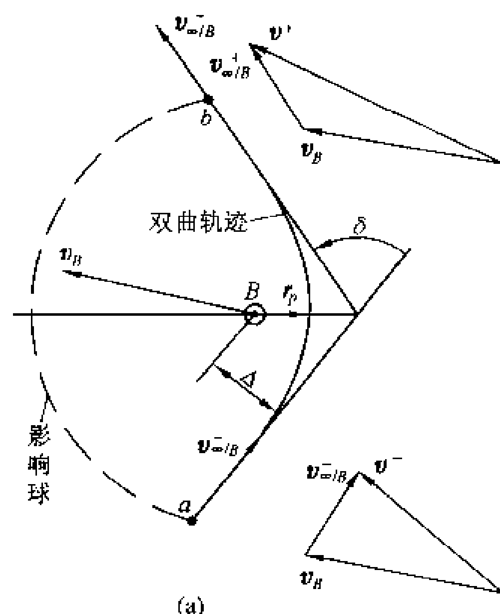


(a)

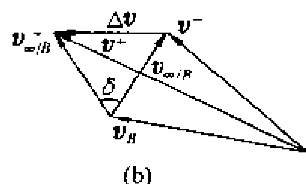


(b)

图 6.3　前侧绕飞



(a)



(b)

图 6.4　后侧绕飞

通过上述分析，显见由于空间飞行器在穿过摄动源影响球时，因受到引力作用，使其相对原参考系的速度从 $\boldsymbol{v}^-$ 变为 $\boldsymbol{v}^+$，这就是星体的引力摄动作用。如果把图 6.3(a) 和 6.4(a) 中的两个速度三角形合并，示于图 6.3(b) 和图 6.4(b) 中，还可以看出对于从摄动源前方绕飞(图 6.3) 的情况，经引力摄动之后的空间飞行器在参考系中的速度除了改变方向之外，其幅值减小了；从后方绕飞(图 6.4) 的时候，速度幅值则是增加的。一般而言，如果速度差 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\infty/B}^{+} - \boldsymbol{v}_{\infty/B}^{-}$ 与 $\boldsymbol{v}_B$ 同向(夹角为锐角) 时，则引力摄动结果是使 $\boldsymbol{v}^+$ 的幅值较 $\boldsymbol{v}^-$ 增加；反向(夹角为钝) 时则是减少的。

前面假设双曲线轨道是已知的，然而如何获得所要求的双曲线呢?由式(3.60) 而知，为得到指定的 δ 角，应具有适当的偏心率 e，而 e 的获得又与摄动星体质心至渐近线的距离 Δ 有关(见式(3.65))。因此，只要找到合适的进入点 a，和已知该点的速度 $\boldsymbol{v}_a^-$，即可求得 Δ 并算出速度转过的角度 δ。

然而速度变化量 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-$ 和被绕行的摄动源有什么关系?由图 6.3(b) 和图 6.4(b) 可以求得

$$\Delta v = |\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-| = |\boldsymbol{v}_{\infty/B}^{+} - \boldsymbol{v}_{\infty/B}^{-}| = 2v_{\infty/B}\sin\frac{\delta}{2} \tag{6.12}$$

式中，$v_{\infty/B}$ 是 $\boldsymbol{v}_{\infty/B}^{+}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\infty/B}^{-}$ 的模。用式(3.60) 和式(3.55) 有

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + (r_p/a)} \tag{6.13}$$

其中，r_p 和 a 分别是双曲线轨道的近心点半径和半长轴。再用 a 点或 b 点的运动参数写出

能量方程式

$$\frac{v_{\infty/B}^2}{2} - \frac{\mu_B}{R_B} = \frac{\mu_B}{2a}$$

如认为 R_B 很大，因而使上式左侧第二项为零，于是有

$$a = \frac{\mu_B}{v_{\infty/B}^2} \tag{6.14}$$

将式(6.14)代入式(6.13)和式(6.12)，得

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + (r_p v_{\infty/B}^2/\mu_B)} \tag{6.15}$$

$$\Delta v = \frac{2v_{\infty/B}}{1 + (r_p v_{\infty/B}^2/\mu_B)} \tag{6.16}$$

由此可见，速度变化量 Δv 与近心点半径 r_p 有关，当它与摄动源星体的半径 r_B(或它的大气层半径)相等时，Δv 将达到最大值，即

$$\Delta v_{\max} = \frac{2v_{\infty/B}}{1 + (r_B v_{\infty/B}^2/\mu_B)} \tag{6.17}$$

不过，$\Delta v_{\max}$ 还与 $v_{\infty/B}$ 有关，如取 $\mathrm{d}\Delta_{v\max}/\mathrm{d}v_{\infty/B} = 0$，便可求得

$$v_{\infty/B} = \sqrt{\frac{\mu_B}{r_B}} = v_{CB} \tag{6.18}$$

即当 $v_{\infty/B}$ 与摄动源 B 的第一宇宙速度相等时，$\Delta v_{\max}$ 达到最大 $(\Delta v_{\max})_{\max}$。把式(6.18)代入式(6.17)，还可求得

$$(\Delta v_{\max})_{\max} = v_{CB} \tag{6.19}$$

用式(6.17)绘制成图，示于图6.5中[5]。

事实上，摄动源在改变绕其飞行的空间飞行器的速度同时，自身将获得或付出能量。如果空间飞行器在 B 影响球内运行的时间为 Δt，平均加速度是 $\Delta v/\Delta t$，如果在此期间摄动源 B 运动了 ΔS 距离，那么摄动源的轨道速度 v_B 应与 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 相等，因此空间飞行器(或摄动源)获得或付出的能量应是 $\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta s$，其最大值是

$$\Delta\varepsilon_{\max} = v_B \Delta v_{\max} \tag{6.20}$$

利用星体引力摄动效应，可使空间飞行器改变飞行方向和速度大小，从而使行星际飞行的方案多样化或达到节约能量的目的。若同时再辅以变轨发动机的作用，能使轨道的设计更丰富多彩。

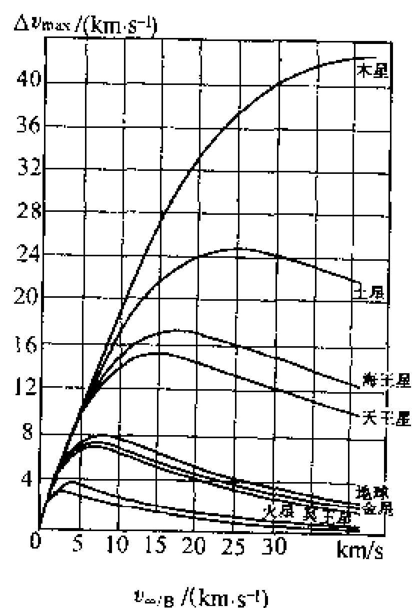


图6.5　行星的摄动效果

6.4 向月球飞行

月球距地球 38.44 万 km，绕地球的轨道十分接近圆形（e = 0.054 9），由于它自转一周所需时间（27.322 天）与绕地球公转一周的时间相同，因此总以固定的一面向着地球。它的平均半径约为 1 738 km（只是地球的 1/3.67），质量 7.35×10^{22} kg（是地球 1/81.5），它在地球引力场内的影响球半径是 66.1×10^3 km。月球的轨道平面（白道）与地球轨道平面（黄道）之间的夹角为 5°8′，且两平面的交线以 18.6 年的周期自东向西退行；而赤道平面与黄道的夹角保持着 23°27′ 的数值，它们的交线指向固定方向（春分点）。因此，赤道与白道面的夹角 η 在 18°19′ = 23°27′ − 5°8′ 和 28°35′ = 23°27′ + 5°8′ 之间变化，周期为 18.6 年。图 6.6 是 η 随年代的变化过程，大约在 1997 年 η 为最小，到 2006 年达到最大。

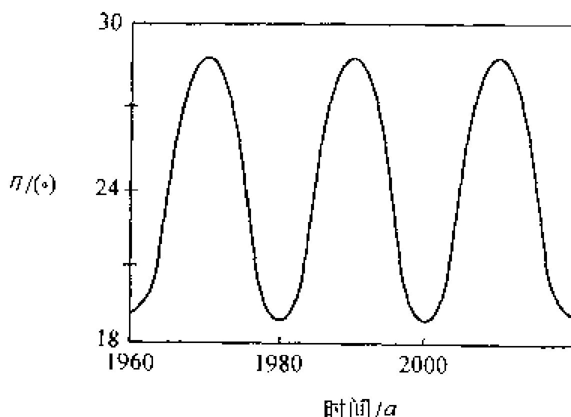


图 6.6 赤白交角的变化

自地球向月球飞行，可分为同平面和非同平面两种。同平面向月飞行，是空间飞行器轨道平面恰与月球绕地球运动平面（白道）相重合的情况，而非同平面飞行是这两个平面不重合的情况。在 4.2 节中，曾说明在某纬度 φ 发射卫星，无论使它入轨的方向朝向何方都无法得到比 φ 角小的轨道倾角。因此，从我国最南端的西昌发射场（φ = 28°）发射空间飞行器入轨，不经过轨道倾角的变换，后者的数值都不会小于 28°（即 $i \geqslant 28°$）。结合图 6.6，显见从西昌以同平面向月球飞行只有少数几年才有可能（每 18.6 年中大约只有 3 年）；在其他年份只有经过轨道倾角变换，才能以同平面方式飞向月球，这意味着要付出多余的能量。解决的办法，是采用和白道相交的非同平面方案向月球飞行。后种方案虽不需消耗改变轨道倾角的能量，但对于飞行精度却有较高的要求。

本节只研究同平面向月飞行的方案。

由地球飞向月球及相反的飞行，只要考虑在地球和月球影响球内飞行的两个阶段，是应用圆锥曲线拼合法的最简单实例。向月球的飞行，通常先将空间飞行器射入近地圆轨道（做下步飞行前的测量和控制准备），然后，再飞向月球，当以霍曼椭圆过渡时，椭圆轨道分别在近地点和远地点与飞行器绕地球运行的轨道及月球轨道相切时（图 6.7），取椭圆的远地点半径 R_a 与月球轨道半径 $R_☾$ 相等，而飞行器绕地球的轨道高度为 220 km 左右，即取 R_p = 6 600 km，那么霍曼过渡轨道的参数是

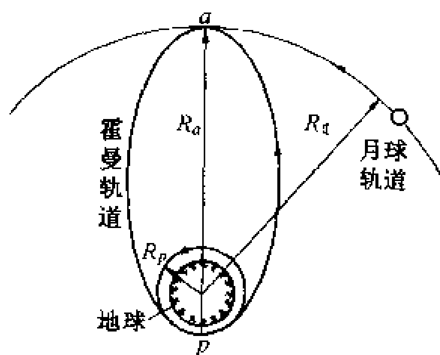


图 6.7 霍曼轨道向月飞行

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} = \frac{R_{☾} - R_p}{R_{☾} + R_p} = 0.966 \tag{6.21}$$

$$a = \frac{1}{2}(R_{☾} + R_p) = 1.95 \times 10^5 \ (\text{km}) \tag{6.22}$$

若取 $\mu_{\oplus}$ 为地球引力常数，则近地点速度由式(3.47)得

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{R_p}}\sqrt{\frac{R_{☾}}{R_{☾} + R_p}} = 10.90 \ (\text{km/s}) \tag{6.23}$$

这时飞行器的轨道运动角动量是

$$h = v_p R_p = 7.19 \times 10^4 \ (\text{km}^2/\text{s}) \tag{6.24}$$

从地球飞到月球的时间是过渡轨道周期之半，即

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\oplus}}} \approx 5 \text{ d}$$

这是向月球飞行的最长时间。如果我们想缩短过渡时间，可以把椭圆的半长轴增加，让飞行器到达月球时，速度不是与月球轨道相切，而是与之相交(图 6.8)。这样做所需能量增加不多，飞行时间却可大大缩减。由式(6.23)可以看出，即把 R_a 增至无穷大成为抛物线轨道时，有 $v_p = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{R_p}} = 10.99$ km/s，其值只不过增加了 8/1 000，所付出的燃料增加量并不很多，然而飞至月球的时间却可大大缩减。为估计缩短后的飞行时间，将 R_a 取为 $R_{☾}$ 的两倍，用式(6.21) ~ 式(6.24)可算得

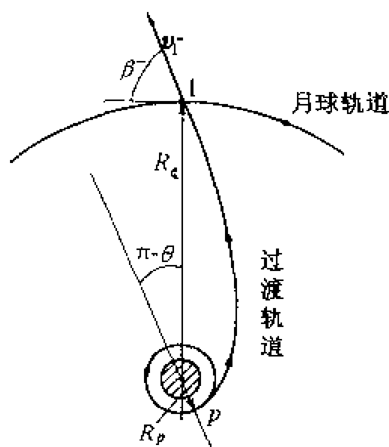


图 6.8　大椭圆轨道向月飞行

$$e = 0.983, a = 38.77 \times 10^4 \text{ km}$$
$$v_p = 10.94 \text{ km/s}, h = 7.22 \text{ km}^2/\text{s}$$

令 $r = R_{☾}$，便可由

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{6.25}$$

求得空间飞行器飞至月球时，对应的真近角是 $\theta = 169.32°$，由式(3.36)和式(3.41)知，到达月球的时间是 2.56 d。速度增加了不足 0.4%，而运行时间却减少了一半！

再来分析空间飞行器到达月球轨道时的横向速度分量 v_θ。由动量矩守恒，显然可以写出

$$h = v_p R_p = R_{☾} v_\theta \tag{6.26}$$

把有关参数值代入后可求得 $v_\theta = 0.19$ km/s，由于 v_p 的变化范围很小，v_θ 可视为不变的。只要沿椭圆轨道从地球飞至月球，其 v_θ 值都可近似地认为与此值相等。

空间飞行器到达月球时的速度可以由能量方程式

$$\frac{(v_1^-)^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{R_{☾}} = -\frac{\mu_{\oplus}}{2a}$$

算得

$$v_1^- = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{R_☾}}\sqrt{\frac{R_a + R_p - R_☾}{R_a + R_p}} = 1.023 \text{ km/s} \tag{6.27}$$

而速度的方向用β^-角描述，利用$h = R_☾ v_1^- \cos\beta^- = v_p R_p$，再以式(3.47)和式(6.27)消去$v_p$和$v_1^-$，得

$$\cos\beta^- = \frac{R_p v_p}{R_☾ v_1^-} = \sqrt{\frac{R_p}{R_☾}}\sqrt{\frac{R_a}{R_a + R_p - R_☾}},\beta^- = 79.4° \tag{6.28}$$

反之，如果给定空间飞行器到达月球轨道时的v_1^-和β^-，还可以根据4.1节中的方法，计算轨道的形状和在地球轨道上p点处的运动参数。

空间飞行器达到月球影响球后，便进入了以月球为中心星体的二体系统，这时应首先把空间飞行器的速度变换为相对月球的。前面各式计算的速度都是相对地球的，而月球相对地球的速度是

$$v_☾ = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_☾}} = 1.02 \text{ km/s} \tag{6.29}$$

其方向与半径垂直，因此空间飞行器相对月球的速度可利用图6.9计算。图中1点是空间飞行器进入月球影响区的位置，相对地球的速度是v_1^-(参考图6.8)，相对月球的速度应是

$$\boldsymbol{v}_{\infty/☾}^- = \boldsymbol{v}_1^- - \boldsymbol{v}_☾ \tag{6.30}$$

由图知，它的模是

$$v_{\infty/☾}^- = \sqrt{(v_1^-\cos\beta^- - v_☾)^2 + (v_1^-)^2\sin^2\beta^-} = 1.31 \text{ (km/s)} \tag{6.31}$$

方向以ϕ^-角描述

$$\phi^- = \arctan[v_1^-\sin\beta^- /(v_1^-\cos\beta^- - v_☾)] + \pi \tag{6.32}$$

图6.9中的$v_1^-\cos\beta^- = v_\theta$是$v_1^-$垂直半径方向的分量，前已论述$v_\theta$的值可视为常量，等于0.19 km/s，所以$v_{\infty/☾}^-$的最小值是1.02 - 0.19 = 0.83 (km/s)。在月球影响球边界处空间飞行器逃逸月球的速度是$\sqrt{\frac{2\mu}{r_☾}}$，其中$\mu_☾ = 4\,887 \text{ km}^3/\text{s}^2$和$r_☾ = 66\,100$ km分别是月球的引力常数和影响球半径。因此月球逃逸速度是0.385 km/s，它比$v_{\infty/☾}^-$的最小值还小。由此可知，空间飞行器进入月球影响球之后，将循双曲线运动，这与本章6.3的结论是一致的。所以，空间飞行器进入月球影响区之后，应该应用3.2节和6.3节中的公式做各项计算。

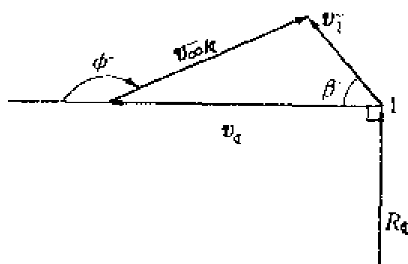


图6.9　与月球的速度关系

【例1】　一空间飞行器从半径为r_p = 6 600 km的圆形绕地球轨道出发，沿近地点与绕地球轨道相切，远地点矢径$R_a = 2R_☾$的椭圆轨道飞向月球，若进入月球影响球时，相对月球的速度$v_{\infty/☾}^-$的延长线与月球的距离为Δ = 4 000 km，试求空间飞行器在月球不同侧进入时的飞行轨迹。

【解】在地球影响球内计算时，为了简单，认为月球影响球半径小，视为在月球轨道上

的一点，虽然引入一些误差，但对分析飞行过程却是一个可用的方法，这样就可把椭圆轨道与月球轨道的交点视为空间飞行器进入月球影响区的初始点。根据题意，本例的过渡椭圆轨道恰是前面曾分析的，而且有

$$e = 0.983, a = 38.77 \times 10^4 \text{ km}, v_p = 10.94 \text{ km/s}$$

到达月球时相对地球的速度和速度方向，分别是(图(6.8))

$$v_1^- = 1.023 \text{ km/s 和 } \beta_1^- = 79.4°$$

利用式(6.30)可求得空间飞行器相对月球的速度 $\boldsymbol{v}_{\infty/☾}^-$，其幅值 $v_{\infty/☾}^-$ 和方向 ϕ^-，由式(6.31)和式(6.32)计算，它们是(见图6.10(c)中△123，说明见后)

$$v_{\infty/☾}^- = 1.305 \text{ km/s 和 } \phi^- = 129.6°$$

当空间飞行器进入月球影响区后，便应把月球视为不动的中心，空间飞行器以 $\boldsymbol{v}_{\infty/☾}^-$ 为进入的速度，对月球进行双曲线绕飞。无论从月球前方和后方绕飞，其轨道参数计算如下(图6.10(a)和(b))。

以式(3.65)和式(3.60)求得双曲线的偏心率和速度转角为

$$e = [1 + \frac{(v_{\infty/☾}^-)^4 \Delta^2}{\mu_☾^2}]^{1/2} = 1.716 \tag{6.33}$$

$$\delta = 2 \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) = 71.3° \tag{6.34}$$

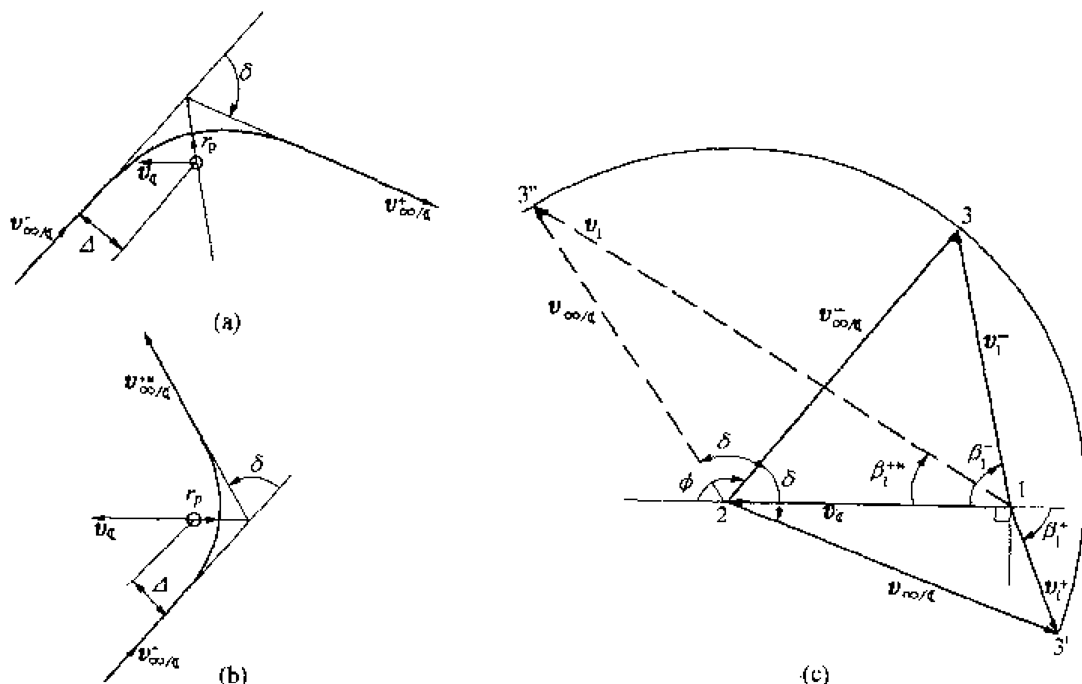


图6.10　空间飞行器绕月球的飞行

对于前方绕飞 δ 是顺时针转动的，后方绕飞则是逆时针的，再利用式(3.64)和式(3.55)求得轨道参数

$$a = \Delta / \sqrt{e^2 - 1} = 2\,870 \text{ (km)} \tag{6.35}$$

$$r_p = a(e - 1) = 2\,054 \text{ (km)} \tag{6.36}$$

r_p 太于月球平均半径，说明飞行器并未落向月面，计算有效。

空间飞行器飞出月球影响区，立即进入地球的作用范围。

飞行器在月球影响球内飞行过程中速度变化情况见图(6.10c)。1点表示空间飞行器进入月球影响球的点，$v_{\text{☾}}$ 是月球轨道速度，它与飞行器进入速度 v_1^- 的夹角为 β_1^-，两者之差($v_1^- - v_{\text{☾}}$)是飞行器相对月球的速度 $v_{\infty/\text{☾}}^-$，这种关系可由△123表示。空间飞行器飞出月球影响球时，其速度幅值不变，方向却要转过 δ 角，从月球前或后方绕飞时，δ 角分别是顺(图6.10(a))或逆(图6.10(b))时针转的。这在(图6.10(c))中是 $v_{\infty/\text{☾}}^-$ 的矢端3点沿着以2为心的圆孤，分别转至3′和3″，成为 $v_{\infty/\text{☾}}^+$(前方绕飞)和 $v_{\infty/\text{☾}}^{+*}$(后方绕飞)。从月球绕飞后，飞行器离开月球影响球时，它相对地球的速度分别是

$$v_1^+ = v_{\infty/\text{☾}}^+ + v_{\text{☾}} \text{或} v_1^{+*} = v_{\infty/\text{☾}}^{+*} + v_{\text{☾}} \tag{6.37}$$

从△123′(或△123″)，还可求得它们的幅值和与当地水平的夹角分别是

$$v_1^+ = \left\{[v_{\text{☾}} + v_{\infty/\text{☾}}^+\cos(\phi^- + \delta)]^2 + (v_{\infty/\text{☾}}^+)^2\sin^2(\phi^- + \delta)\right\}^{1/2} = 0.508\ (\text{km/s}) \tag{6.38}$$

$$\beta_1^+ = \arctan\left\{v_{\infty/\text{☾}}^+\sin(\phi^- + \delta)/[v_{\text{☾}} + v_{\infty/\text{☾}}^+\cos(\phi^- + \delta)]\right\} = -66.8° \tag{6.39}$$

$$v_1^{+*} = \left\{[v_{\text{☾}} + v_{\infty/\text{☾}}^{+*}\cos(\phi^- - \delta)]^2 + (v_{\infty/\text{☾}}^{+*})^2\sin^2(\phi^- - \delta)\right\}^{1/2} = 2.03\ (\text{km/s}) \tag{6.40}$$

$$\beta_1^{+*} = \arctan\left\{v_{\infty/\text{☾}}^{+*}\sin(\phi^- - \delta)/[v_{\text{☾}} + v_{\infty/\text{☾}}^{+*}\cos(\phi^- - \delta)]\right\} = 33.1° \tag{6.41}$$

可见 $v_1^+ < v_{\text{☾}}$，空间飞行器将返回绕地球的轨道，而 $v_1^{+*} > \sqrt{2}v_{\text{☾}}$，表明空间飞行器将脱离地球引力场，成为太阳系中的人造行星。

令式(4.7)和式(4.8)中的 $r_0 = R_{\text{☾}}$，$\mu = \mu_{\oplus}$，就可求得由速度 v_1^+(或 v_1^{+*})和速度方向 β_1^+(或 β_1^{+*})建立的相对地球轨道参数。对于从月球前面绕过的情况，有

$$e = 0.966, \theta_1^+ = 185.4°$$

这两参数也可直接从图4.3查得。显然，返回轨道仍是椭圆的，空间飞行器往返于月球和地球的轨道见图6.11，图中，在月球近旁的轨道被描绘为一个点。

对于从月球后方绕飞的情况，利用式(4.7)和式(4.8)求得

$$e^* = 2.55, \theta_1^{+*} = 45.5°$$

可见，空间飞行器在月球后方绕飞，再次进入地球影响球之后，轨道将不再是椭圆，而成为双曲线的了。令 $r = p/(1 + e\cos\theta)$ 中的 r 和 θ 分别等于 $R_{\text{☾}}$ 和 θ_1^{+*} 及 r_p^* 和 $\theta = 0$，可以求得双曲线近心点半径

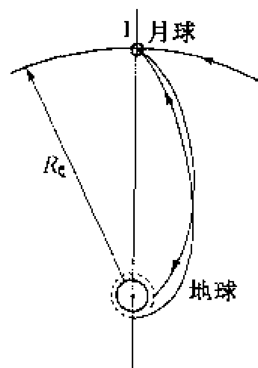


图6.11 往返月球的轨道

$$r_p^* = R_{\text{☾}}\frac{1 + e^*\cos\theta_1^{+*}}{1 + e^*} = 30.18 \times 10^4\ (\text{km})$$

而从式(3.55)，得 $a^* = r_p^*/(e^* - 1) = 19.47 \times 10^4$ (km)，和 $a^*e^* = 49.65 \times 10^4$ km，再从式(3.60)算得

$$\delta^* = 2\arcsin\left(\frac{1}{e^*}\right) = 46.2°$$

利用上述参数，绘出空间飞行器绕月球之后的飞行轨道如图6.12所示。

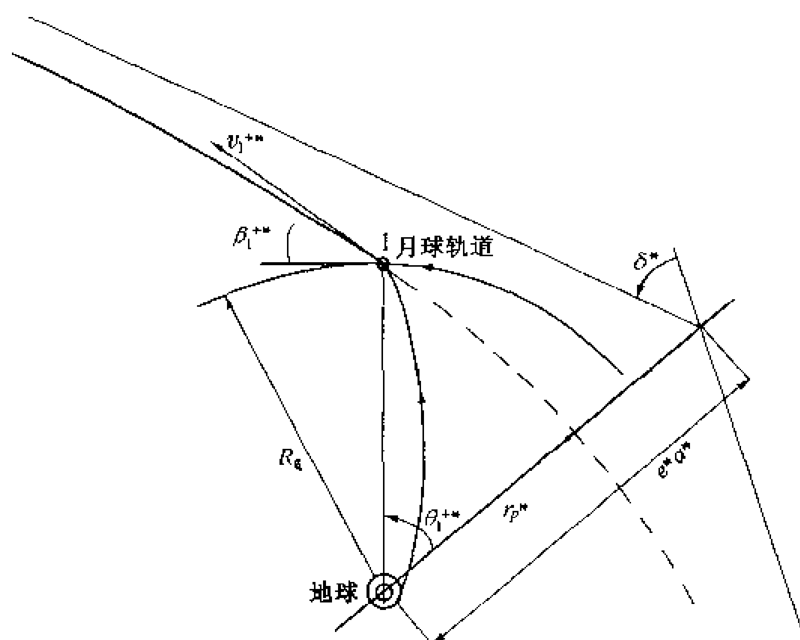


图 6.12　飞离月球

上例说明从地球飞向月球的轨道可以是飞向再返回地球的和脱离地球引力场的两种，但事实上，还有第三种可能，这是在月球上硬或软着陆，(即 r_p 小于月球半径时的情况)。

返回地球的轨道，还可分成：绕月和不绕月飞行的两种，绕月飞行的轨道见图 6.13 和图 6.14。其中，图 6.13 ~ 6.18 中(a) 均是在与地月连线固定的动坐标系中给出的，图 6.13 ~ 6.18 中(b) 均是在与地球固定坐标系内绘制的。在图中，1 是空间飞行器的轨道，2、3、4 分别是空间飞行器自地球轨道出发、向月飞行和返回地球时月球的位置。不绕月飞行的例子见图 6.15 和图 6.16 所示。这些飞行方案的共同特点是从月球前方进入月球影响球，不同点在于，绕月飞行时，空间飞行器经月球后方返回地球，而不绕飞行时，飞行器只从月球前方折返。

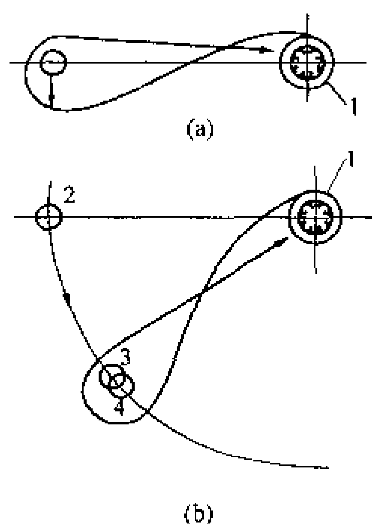


图 6.13　绕月飞行轨道之一

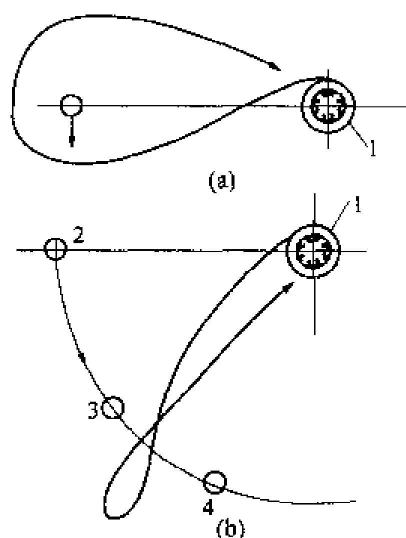


图 6.14　绕月飞行轨道之二

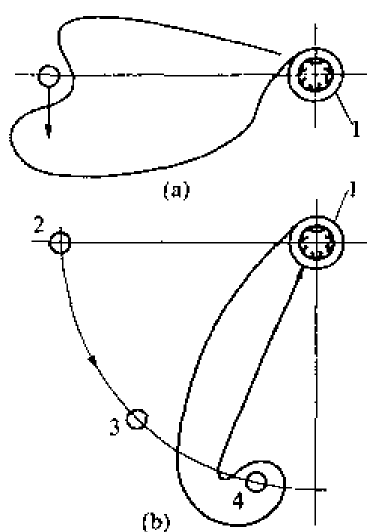


图 6.15　非绕月飞行轨道之一

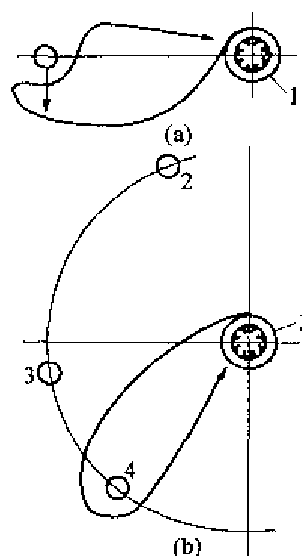


图 6.16　非绕月飞行轨道之二

图6.17和图6.18示出了在月面降落的两种可能轨迹[5]，前者是空间飞行器在上行段（地球至月球）时到达月球的轨迹，可以是双曲线、抛物线或椭圆曲线；后者是在下行段到达月球的轨迹，它只能以椭圆轨道实现。

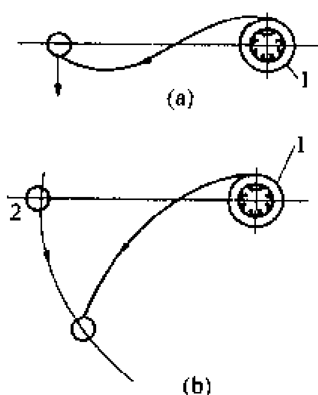


图6.17　降落月球的轨道之一

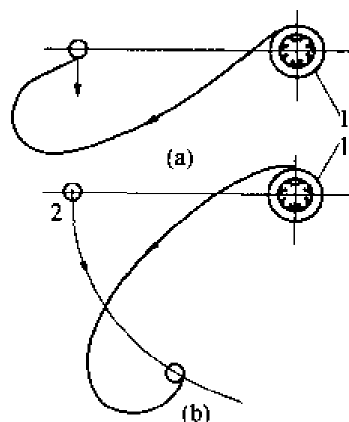


图 6.18　降落月球的轨道之二

如果在月球影响球的适当地点进行轨道过渡操作，还可以使空间飞行器成为月球卫星。

向月飞行最壮丽活动当属阿波罗登月计划，自 1969 年 7 月 16 日阿波罗 11 号载人登上月球至 1972 年 12 月 19 日阿波罗 17 返回地球，共有 6 船 12 人次到月球探索。阿波罗的基本飞行轨道是：首先把阿波罗飞船送入约 200 km 高的地球圆轨道，再以脉冲速度增量使其变换到向月飞行的椭圆轨道，在月球引力作用下转弯，以月球近旁的双曲线运动之后，重又返回向地球飞行的轨道，如图 6.19 所示。如欲向月球派送宇航员，则在月球上空减速，使飞船成为月球卫星，然后使登月舱与指令舱分离，制动并软着陆月面；在完成任务后，登月舱的上升级携带登月宇航员从月面起飞，与留在轨道并继续绕月飞行的指令舱对接，最后启动发动机沿返回轨道飞回地球。

6.5 太阳系行星间的飞行

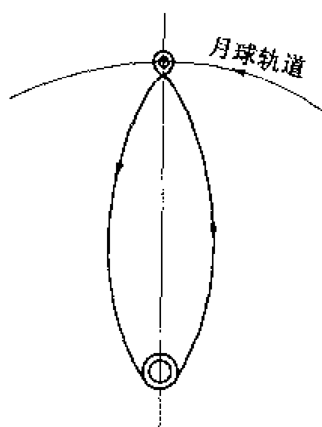


图 6.19 阿波罗飞船的轨道

行星间飞行的分类：

按照空间飞行器是否返回地球，可以划分为不返回地球的和返回地球的行星际飞行两种；

按照是否利用中间星体的引力摄动效应，又可划分为利用和不利用这种效应的行星际飞行；

按照空间飞行器在目标行星附近的轨道，还可以再划分为绕飞或降落、进入（目标行星）环绕轨道、软着陆、向目标行星卫星的飞行和复合飞行等五组。

再将上述种、类、组组合起来，就可以形成更多的飞行方案。

【例 2】 不利用引力摄动向火星飞行的飞行方案。

第一步考虑直接向火星飞行的例子（图6.20），空间飞行器要先后在地球、太阳和火星影响球中飞行。图示在太阳影响球中的轨道，地球和火星影响球被视为点，轨道简化为在黄道平面中的圆。

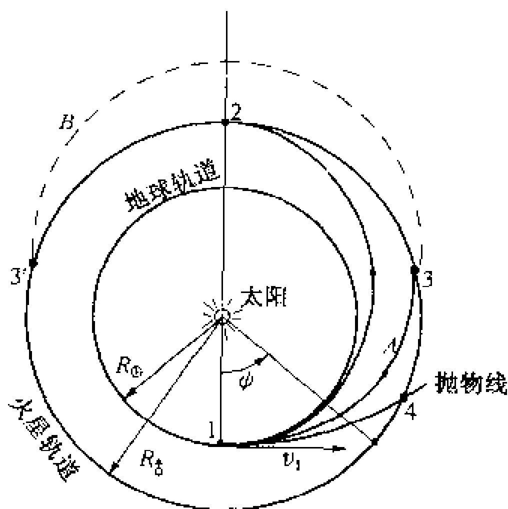


图 6.20 向火星的飞行

图中给出了三条在太阳影响球内的飞行轨道：从 1 点出发至 2 点到达火星的霍曼轨道；在 1 点与地球轨道相切，在 3 点（A 轨道）或 3′ 点（B 轨道）与火星会合的大椭圆轨道；在 1 点与地球轨道相切，4 点为到达火星的抛物线轨道。

先较详细地说明霍曼轨道，对其余两种将列表给出结果，以便比较。

设 $R_\oplus$ 和 $R_♂$、$v_\oplus$ 和 $v_♂$ 分别是地球和火星的轨道半径和平均轨道速度，$\mu_\odot$、$\mu_\oplus$ 和 $\mu_♂$ 分别是太阳、地球和火星的引力常数，$r_\oplus$ 和 $r_♂$ 为地球及火星的影响球半径。

$R_\oplus = 1.496 \times 10^8$ km　　$R_♂ = 2.279 \times 10^8$ km

$v_\oplus = 29.76$ km/s　　$v_♂ = 24.11$ km/s

$\mu_\oplus = 3.986 \times 10^5\ \text{km}^3/s^2$　　$\mu_♂ = 4.29 \times 10^4\ \text{km}^3/\text{s}^2$　　$\mu_\odot = 1.327 \times 10^{11}\ \text{km}^3/s^2$

$r_\oplus = 9.29 \times 10^5$ km　　$r_♂ = 5.78 \times 10^5$ km

出发 1 点及到达 2 点的霍曼过渡速度分别是

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{R_\oplus}}\sqrt{\frac{2R_♂}{R_\oplus + R_♂}} = 32.73\ (\text{km/s}) \tag{6.42}$$

$$v_2 = v_1 \frac{R_\oplus}{R_♂} = 21.48\ (\text{km/s}) \tag{6.43}$$

在地球影响球内的飞行器由于地球轨道速度，已提供空间飞行器相对太阳 29.76 km/s 的初值，它飞离地球影响球时，相对地球只需有 $v_1 - v_{\oplus} = 2.968$ km/s 的速度即可。用前面约定的表示法应写为 $v^{+}_{\infty/\oplus}$。

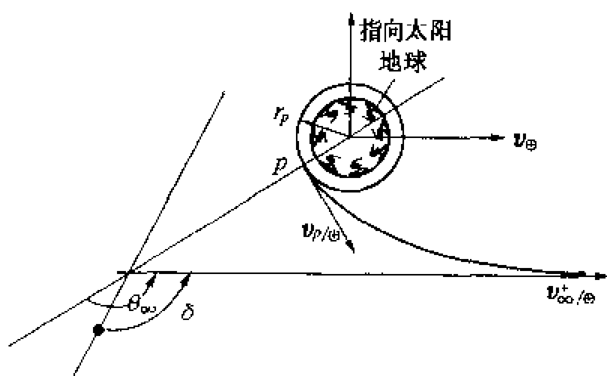


图 6.21 相对地球的运动

如设空间飞行器从高度为 222 km 的地球圆轨道(半径 r_p = 6 600 km) 出发(图6.21)，速度为 $v_{p/\oplus}$，使到达地球影响球边界时，速度恰降为 $v^{+}_{\infty/\oplus}$。利用能量方程式

$$\frac{v^2_{p/\oplus}}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_p} = \frac{(v^{+}_{\infty/\oplus})^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}}$$

可以求得

$$v_{p/\oplus} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_p} + (v^{+}_{\infty/\oplus})^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}}} = 11.346 \text{ (km/s)} \tag{6.44}$$

它比半径为 r_p 的地球圆轨道速度大

$$\Delta v_1 = v_{p/\oplus} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_p}} = 3.57 \text{ (km/s)}$$

换言之，从地球上空 222 km 圆轨道出发，需给空间飞行器 3.57 km/s 的速度增量(若以 r_p = 6 378 km 代入上式计算，还可求得直接从地球表面出发，应赋予空间飞行器的速度，它的数值为 11.567 km/s)。

可见，从 r_p = 6 600 km 圆轨道出发，只要 Δv_1 的速度增量，便能脱离地球影响球。此时在地球影响球内的轨道是双曲线的，利用式(3.66) 和式(3.60) 可求得地球附近的轨道参数

$$e = 1 + \frac{r_p(v^{+}_{\infty/\oplus})^2}{\mu_{\oplus}} = 1.146 \tag{6.45}$$

$$\delta = 2\arcsin\left(\frac{1}{e}\right) = 121.5° \tag{6.46}$$

可见空间飞行器的确是沿双曲线轨道飞离地球的。根据霍曼轨道与地球轨道相切的要求，易知 $\boldsymbol{v}^{+}_{\infty/\oplus}$ 应与 1 点的地球轨道速度方向一致，即双曲线渐近线应与 $\boldsymbol{v}_{\oplus}$ 同向。由此可得(图 6.21)

$$\theta_{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} = 150.8°。$$

霍曼轨道的周期是

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R_{\oplus} + R_{♂}}{2}\right)^3/\mu_{\odot}} = 518 \text{ (d)}$$

空间飞行器自地球飞到火星，在轨道上的飞行角为 $\theta = 180°$，飞行时间是周期之半，即 259 天，在这段时间内火星在自己轨道上转过的角度是

$$\theta_{♂} = 360° \times \frac{259}{T_{♂}} = 135.7°$$

其中，$T_{♂}$ 是火星的恒星年或绕太阳一周所需的天数。空间飞行器与火星在这 259 天之内转过的角度差，即是飞行器离地球时火星应超前地球的角度(图 6.20)

$$\psi = \theta - \theta_{♂} = 44.3°$$

由图 6.20 可知，其余两条轨道的有关参数也可类似地求得，与霍曼轨道的结果一同列于表 6.1 中。由表 6.1 可知，这几条轨道所需能量相差并不多($v^*_{p/\oplus} = 11.567 \sim 16.67$ km/s)，然而飞行时间却相差极大(霍曼过渡为 259 天，大椭圆 A 为 105 天，抛物线为 70 天)。时间的缩短主要是由于飞行路程极大减小(霍曼过渡的飞行器转角为 180°，大椭圆 A 为 92.6°，抛物线为 71.8°)，其次是空间飞行器速度的提高。从表中还看出霍曼过渡、大椭圆 A 和抛物线飞行时火星超前地球的角度分别各为 44.3°、37.6° 和35.1°，它们之差仅为 9.2°，地球要用 20 天才能赶上这个差值。由于地球和火星的会合周期是 779.94 天(见表 6.1)，即每隔大约 780 天才有一次以霍曼方式从地球向火星的过渡机会，若改用其他轨道过渡，也只有 20 天左右的时间裕度。换言之，如以与地球轨道相切的椭圆向火星过渡，则发射窗口每 780 天才有一次，每次只有 20 天的窗口时间。

表 6.1　各种过渡方式的结果

参　量	轨　道			
	霍曼过渡	椭圆 A	椭圆 B	抛物线
地面起飞应有的速度 $v^*_{p/\oplus}/(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	11.567	13.0	13.0	16.67
对地球轨道速度的增量 $v^*_{\infty/\oplus}/(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	2.968	6.62	6.62	12.33
轨道周期 T/d	518	1 015	1 015	—
飞行时间 /d	259	105	910	70
飞行器的飞行角 θ/(°)	180	92.6	267.4	71.8
地球运动的角度 $\theta_{\oplus}$ /(°)	255.3	103.5	897.0	69.0
火星运动的角度 $\theta_{♂}$/(°)	135.7	55	476.9	36.7
火星的超前角度 ψ/(°)	44.3	37.6	– 209.5	35.1

【例 3】　利用金星的引力摄动自地球向火星的飞行方案。

首先沿着与地球相切于远地点而近地点在金星轨道内侧的椭圆轨道飞向金星(图 6.22)，出发点为 1，与金星相会在 2 点。在 2 处空间飞行器借助金星的引力摄动效应加速并转弯，然后沿着另一椭圆轨道飞向火星。所以飞行器要顺序地在地球、太阳、金星、太阳和火星影响球内飞行。

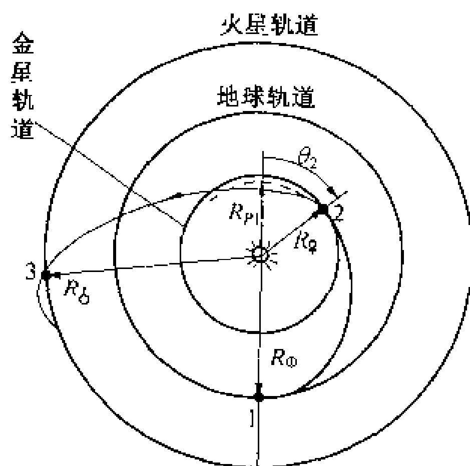


图 6.22　有引力摄动的轨道

先研究自地球飞向金星在太阳引力场内的运动。图 6.22 中由 1 点到 2 点(地球到金星)的椭圆，近心点半径是 $R_{\oplus}$，如取近心点半径为

$R_{p1} = 95 \times 10^6$ km，则偏心率是

$$e = \frac{R_{\oplus} - R_{p1}}{R_{\oplus} + R_{p1}} = 0.223$$

对金星轨道半径 $R_♀ = 108.21 \times 10^6$ km 和 R_{p1} 写出式(3.24)，再解出 2 点的真近角，得

$$\theta_2 = \arccos\left\{\left[\frac{R_{p1}}{R_♀}(1+e) - 1\right]\frac{1}{e}\right\} = 70.7° \quad (6.47)$$

类似于式(6.27) 和式(6.28)，可以求得飞行器在 2 点的日心速度 v_2 和速度方向 β_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{R_♀}}\sqrt{\frac{R_{\oplus} + R_{p1} - R_♀}{R_{\oplus} + R_{p1}}} = 36.98 \text{ km/s} \quad (6.48)$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\sqrt{\frac{R_{p1}}{R_♀}}\sqrt{\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + R_{p1} - R_♀}}\right) = -11.1° \quad (6.49)$$

空间飞行器自 1 点运动到 2 点所需的时间，是椭圆运行周期之半，减掉从近心点至 2 点的飞行时间。利用式(3.37) 求得与 θ_2 对应的偏近角 $\psi_2 = 59°$，再以式(3.41) 求得 1 点至 2 点的飞行时间

$$T_1 = (\pi - \psi_2 + e\sin\psi_2)\sqrt{\left(\frac{R_{p1} + R_{\oplus}}{2}\right)^3 \Big/ \mu_\odot} = 98.9 \text{ (d)} \quad (6.50)$$

在此期间，金星运行的角度是 $\theta_♀ = 158.7°$，飞行器飞过 $\theta_1 = 180° - \theta_2 = 109.3°$，所以，空间飞行器自地球出发时，金星应落后于地球

$$\psi_♀ = \theta_♀ - \theta_1 = 49.4° \quad (6.51)$$

当空间飞行器飞到金星时，如果认为它从金星后方进入影响球，然后向前绕飞，则金星的摄动作用是使飞行器改变方向并加速。在金星引力范围内，空间飞行器以双曲线轨道运动，若取近心点半径 $R_{p♀} = 12\,000$ km，即与金星直径大约相等。图 6.23(a) 是双曲线轨道，而图6.23(b) 中是对应的速度关系。图中 $v_♀$ 是金星的轨道速度，飞行器进入金星影响球时，空间飞行器相对金星的速度是 $v^-_{\infty/♀}$，从图 6.23(b) 的几何关系，可得

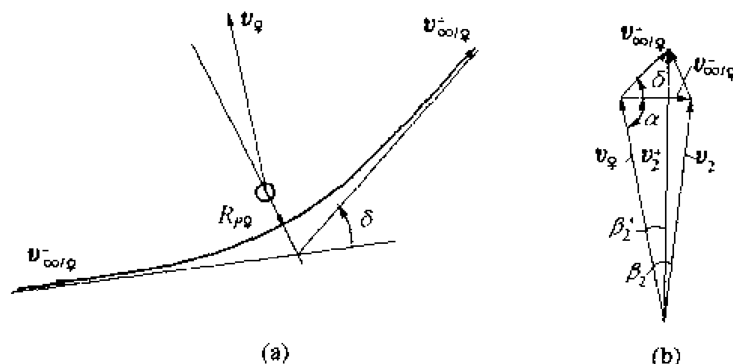


图 6.23 速度间的关系

$$v^-_{\infty/♀} = [(v_2 - v_♀\cos\beta_2)^2 + v_♀^2\sin^2\beta_2]^{1/2} = 7.237 \text{ (km/s)} \quad (6.52)$$

$$\sin\alpha = \frac{v_2\sin\beta_2}{v^-_{\infty/♀}} = 0.983\,8, \alpha = 100.3° \quad (6.53)$$

再用式(3.66)和式(3.60)，求出双曲轨道的偏心率和渐近线夹角 δ(速度 $v_{\infty/♀}^{-}$ 的方向变化角)

$$e_2 = 1 + \frac{R_{p♀}(v_{\infty/♀}^{-})^2}{\mu_♀} = 2.932 \tag{6.54}$$

$$\delta = 2\arcsin(\frac{1}{e_2}) = 39.88° \tag{6.55}$$

由图 6.23(b)，又可求出飞行器脱离金星影响球时的日心速度幅值和方向

$$v_2^+ = [(v_{\infty/♀}^+)^2 + v_♀^2 - 2v_{\infty/♀}^+ v_♀ \cos(\alpha + \delta)]^{1/2} = 40.80\ (\text{km/s}) \tag{6.56}$$

$$\beta_2^+ = \arcsin\left[\frac{\sin(\delta + \alpha)}{v_2^+} v_{\infty/♀}^+\right] = 6.52° \tag{6.57}$$

根据2点的 $R_♀$、v_2^+ 和 β_2^+ 三个量，可以利用4.1节中轨道建立方程式算得飞行器自金星飞出后，在太阳引力场中的轨道参数

$$\theta_3 = \arctan\frac{[R_♀(v_2^+)^2/\mu_\odot]\sin\beta_2^+\cos\beta_2^+}{[R_♀(v_2^+)^2/\mu_\odot]\cos^2\beta_2^+ - 1} = 24.3° \tag{6.58}$$

$$e_3 = \{[R_♀(v_2^+)^2/\mu_\odot - 1]^2\cos^2\beta_2^+ + \sin^2\beta_2^+\}^{1/2} = 0.373 \tag{6.59}$$

显然，这是以太阳为焦点的椭圆，它经过2点。对2点和远心点写出式(3.24)，求解远心点半径

$$R_{a3} = \frac{R_♀(1 + e_3\cos\theta_3)}{1 - e_3} = 231.28 \times 10^6(\text{km})$$

它比火星平均轨道半径 $R_♂$(227.9 × 10⁶ km) 稍大，因此沿这个椭圆轨道空间飞行器将能够飞向火星。

返回来再研究地球引力场内的飞行。从1点飞向2点时，在1点应有的速度是

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{R_\oplus}}\sqrt{\frac{R_{p1}}{R_\oplus + R_{p1}}} = 26.24\ (\text{km/s}) \tag{6.60}$$

而地球轨道速度是 $v_\oplus = 29.76$ km/s，所以飞行器飞出地球影响球时应具有 $v_{\infty/\oplus}^+ = v_1 - v_\oplus = -3.52$ km/s 相对地球的速度，即脱离地球影响球时，速度与地球绕太阳的速度方向相反。如空间飞行器从半径为 $r_{p/\oplus} = 6\ 600$ km 近地圆轨道出发，在地球影响球内双曲线轨道的偏心率应由式(3.66)计算

$$e_0 = 1 + \frac{r_{p/\oplus}(v_{\infty/\oplus}^+)^2}{\mu_\oplus} = 1.21 \tag{6.61}$$

而渐近线夹角

$$\delta_0 = 2\arcsin(\frac{1}{e_0}) = 112.1°$$

图6.24是这个双曲线轨道的图示。应用能量方程式，还可求得地球近地点速度

$$v_{p/\oplus} = [(v_{\infty/\oplus}^+)^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_{p/\oplus}}]^{1/2} = 11.54\ (\text{km/s})$$

它比半径为 $r_{p/\oplus}$ 的地球轨道上的速度大

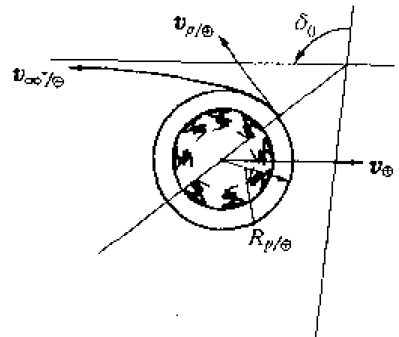


图 6.24　相对地球的运动

$$\Delta v_0 = v_{p/\oplus} - \left(\frac{\mu_\oplus}{r_{p/\oplus}}\right)^{1/2} = 3.77\ (\text{km/s}) \tag{6.62}$$

这是按本方案发射火星飞行器所需的能量。

6.6 限制性三体问题

行星际飞行是个 n 体问题，需考虑多个星体同时作用在空间飞行器上的引力，然而真正求解 n 体问题却是困难的，目前的做法是运用数值计算方法。数值计算方法的优点是可以同时考虑多个星体的作用，而且求解精度高，可以用于精确分析飞行方案，它的缺点是难于找出有关参数的函数关系，物理概念不明显，不易掌握各量间的内在联系。本书前面各章都是把模型限制在空间飞行器和中心引力体两者之间，故称为二体问题，它可以给出解析解，物理概念明了，各量间的关系清楚，特别是对于教学和初步设计是十分方便的工具，而且也可以保证方案分析的精度，但对要求精度高的情况便无能为力了。限制性三体问题比二体问题向前跨进了一步，它是研究三个引力体之间的运动的。三体系统的一般问题目前仍无准确解，如果加上一些限制性条件，形成了限制性三体问题，就可以求得三体系统的某些特性。本节中，这些限制是：

(1) 空间飞行器的质量相对引力体是小量，可以略去它对引力体的影响和它的质量；

(2) 两引力体绕其公共质心做圆运动。

首先研究限制性三体系统绕其公共质心的角速度。在略去空间飞行器后，只剩下二个中心引力体，它们在惯性空间的相对转动周期应该符合式(3.29)的关系，即

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

其中，$\mu = G(M_1 + M_2)$，M_1 和 M_2 是相互绕着公共质心旋转的星体质量(图6.25)，r 是圆轨道半径，或是两个星体之间的距离，利用上式便可以求得绕圆轨道运动的两星体旋转角速度

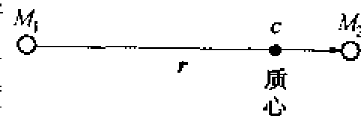


图 6.25 三体系统

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} \tag{6.63}$$

再把空间飞行器 m 加入组成三体系统(图6.26)，设过系统质心 C 做坐标系 $CXYZ$，它随 M_1 和 M_2 一同旋转，M_1 和 M_2 在 X 轴上，M_1、M_2 和 C 点至 m 的矢径分别是 $\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\rho}_2$ 和 $\boldsymbol{\rho}$，根据 C 为质心的条件，显然可得 C 至 M_1 和 M_2 的距离

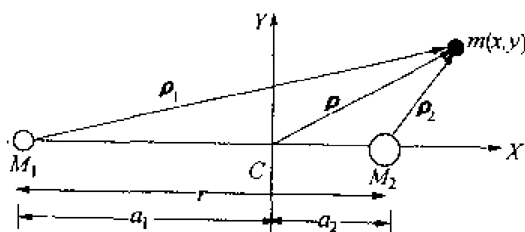


图 6.26 三体系统模型

$$a_1 = r\frac{M_2}{M_1 + M_2} \tag{6.64}$$

$$a_2 = r\frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{6.65}$$

设空间飞行器的坐标为(x,y)，则$\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\rho}_2$和$\boldsymbol{\rho}$的坐标分量表达式是($\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$是X和Y方向的单位矢量)

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{6.66}$$

$$\boldsymbol{\rho}_1 = (x + a_1)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{6.67}$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = (x - a_2)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{6.68}$$

M_1和M_2对m的引力合力(单位质量的)是

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\boldsymbol{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\boldsymbol{\rho}_2$$

式中，$\mu_1 = GM_1$和$\mu_2 = GM_2$是M_1和M_2星体的引力常数。把式(6.67)和式(6.68)代入后有

$$\boldsymbol{f} = -\left[\frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x + a_1) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x - a_2)\right]\boldsymbol{i} - \left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3}y + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}y\right)\boldsymbol{j} \tag{6.69}$$

如果设M_1和M_2形成的引力场势函数为

$$U = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} \tag{6.70}$$

其中的ρ_1和ρ_2显然是

$$\rho_1 = \sqrt{(x + a_1)^2 + y^2} \tag{6.71}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + y^2} \tag{6.72}$$

则有

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x + a_1) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x - a_2) \tag{6.73}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\rho_1^3}y + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}y \tag{6.74}$$

所以式(6.69)又可以写为

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} \tag{6.75}$$

显然，由式(6.75)可以看出，$\frac{\partial U}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial y}$分别是引力合力在$X$和$Y$负方向的分量。

空间飞行器在上述作用力下的加速度可由$\boldsymbol{\rho}$的两阶时间导数求得。我们知道，如矢量在动坐标系中，还要注意区分它在固定和活动坐标系中的时间导数，例如(附录5)

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathring{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \tag{6.76}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathring{\mathring{\boldsymbol{\rho}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathring{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \mathring{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} \tag{6.77}$$

其中$\dot{(\ )}$和$\mathring{(\ )}$分别表示对(　)取固定(惯性)或活动(相对)坐标系中的时间导数。若$\boldsymbol{\omega}$写成

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} \tag{6.78}$$

此处，$\boldsymbol{k}$ 是垂直于 CX 和 CY 轴并构成正交右旋系的 CZ 轴的单位矢量，ω 是 $\boldsymbol{\omega}$ 的模，把式(6.78) 和 式(6.66) 代入式(6.77)，并考虑到 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{const}$，得

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\boldsymbol{i} + (\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\boldsymbol{j} \tag{6.79}$$

根据牛顿第二定理，有

$$\boldsymbol{f} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}$$

再将式(6.75) 和式(6.79) 代入，分别取 x 和 y 方向的等式，有

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{6.80}$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{6.81}$$

以 $\dot{x}$ 乘式(6.80)，$\dot{y}$ 乘式(6.81)，相加化简后得

$$\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta t}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega^2\frac{\delta}{\delta t}(x^2 + y^2) = -\frac{\delta U}{\delta t}$$

令 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$，并对上式积分，有

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + U = C \tag{6.82}$$

C 是积分常数，可由初始条件决定

$$C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}(x_0^2 + y_0^2) + U_0 \tag{6.83}$$

式(6.82) 包含了空间飞行器速度和其坐标间的关系，类似于中心引力场中运动的能量关系，它是我们下面分析中使用的基本方程式。把式(6.82) 移项，写成

$$v^2 = \omega^2(x^2 + y^2) - 2U + 2C$$

显然应有 $v^2 \geqslant 0$，亦即

$$\omega^2(x^2 + y^2) - 2U + 2C \geqslant 0 \tag{6.84}$$

是空间飞行器可能的飞行域，而

$$\omega^2(x^2 + y^2) - 2U + 2C = 0 \tag{6.85}$$

是它的可能飞行域边界，如果把式(6.70) 代入式(6.84)，并考虑到式(6.71) 和式(6.72)，则有

$$\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{2\mu_1}{\sqrt{(x + a_1)^2 + y^2}} + \frac{2\mu_2}{\sqrt{(x - a_2)^2 + y^2}} \geqslant -2C \tag{6.86}$$

若取不同的初始运动点(x_0、y_0)，规定该处空间飞行器的初始速度 v_0，并根据式(6.70) 算出该点的势能 U_0，便可利用式(6.83) 求得式(6.86) 右侧的常数 C。当取式(6.86) 中的等号时，就求得这种初始条件下空间飞行器可能飞行域的边界曲线，曲线的两侧中，适合式(6.82) 左侧大于 $-2C$ 的一方即是空间飞行器可能的飞行域。对于地球、月球、空间飞行器三体系统，从大到小取 $C_1, C_2, \cdots, C_8$ 八个数值，由式(6.86) 绘出对应的可能飞行域的界限，示于图 6.27 ~ 6.34 中。

分析式(6.86) 易知可能飞行域的界限是对称于 x 轴的，这是因为 $U(x, y) = U(x, -y)$ 的缘故。C 值不同时，可能飞行域的界限如下。当取较大的 C_1 值时，若空间飞行器距 M_1 和 M_2 都很远，x 和 y 足够大，则由式(6.86) 可得

$$x^2 + y^2 \cong -2C_1/\omega^2 \tag{6.87}$$

若空间飞行器在 M_1 附近，因 $x + a_1$ 和 y 为小量，而 x 是中等大小的数量，式(6.86)成为

$$(x + a_1)^2 + y^2 \approx \left(\frac{\mu_1}{C_1}\right)^2 \tag{6.88}$$

若空间飞行器在 M_2 近旁，同理可得

$$(x - a_2)^2 + y^2 \approx \left(\frac{\mu_2}{C_1}\right)^2 \tag{6.89}$$

上述三式分别是以坐标原点、M_1 和 M_2 为圆心的圆，见图 6.27，其中，有阴影线部分是不可能进入的飞行域。换言之，空间飞行器只能在 M_1 和 M_2 近旁或相当遥远的区域飞行。

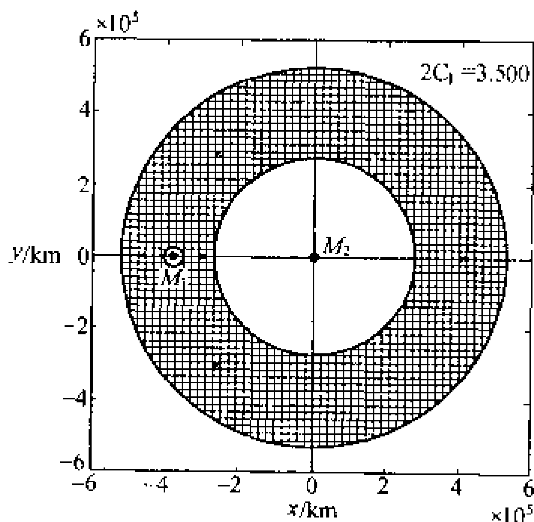


图 6.27　$C = C_1$ 时的飞行范围

若取某 $C < C_1$，则图 6.27 中大圆开始减小，而 M_1 和 M_2 附近的小圆增大。直至达到某 C_2 值时，M_1 和 M_2 近旁的可能飞行域出现一公共交点 L_1（图 6.28）。通过 L_1 点，M_1 和 M_2 近旁的空间飞行器可以互相往来，至于在大圆以外的飞行器，仍然不可能跨入大圆之内。若 M_1 和 M_2 分别是地球和月亮，则自地球上空 200 km 轨道通过点 L_l 进入月球区域的速度是 $v_0 = 10.849$ km/s

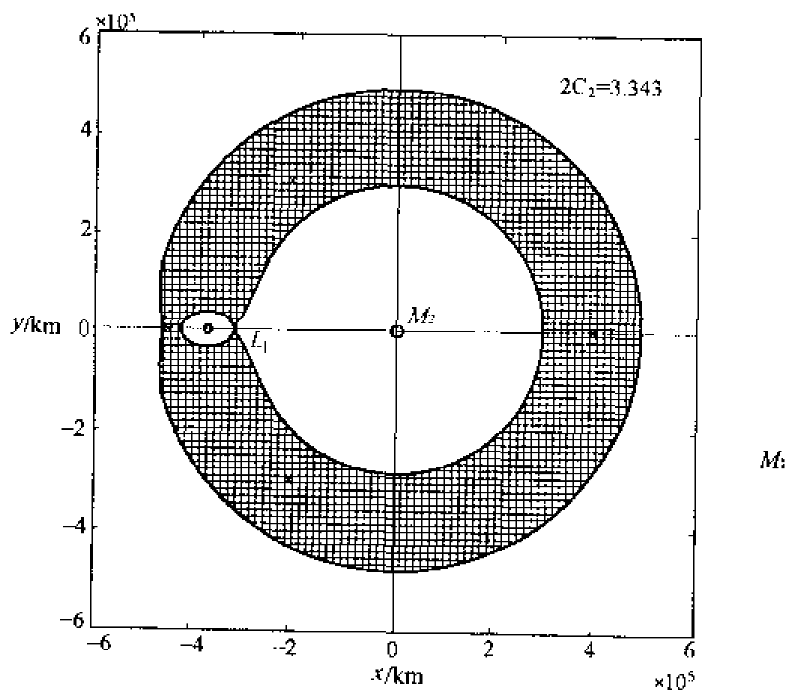


图 6.28　$C = C_2$ 时的飞行范围

M₁

当 C 值进一步减小时，自地球向月亮过渡的走廊从原有的点逐渐拓宽，大圆也逐渐减小，直至某值 C_3，可能的飞行域成为如图 6.29 所示。C 再减小，M_1 和 M_2 附近的可能飞行域将继续增大，而大圆减小，至 C 等于某一 C_4 时，两个区域首先在月球背向地球一侧的点 L_2 联通(图 6.30)。

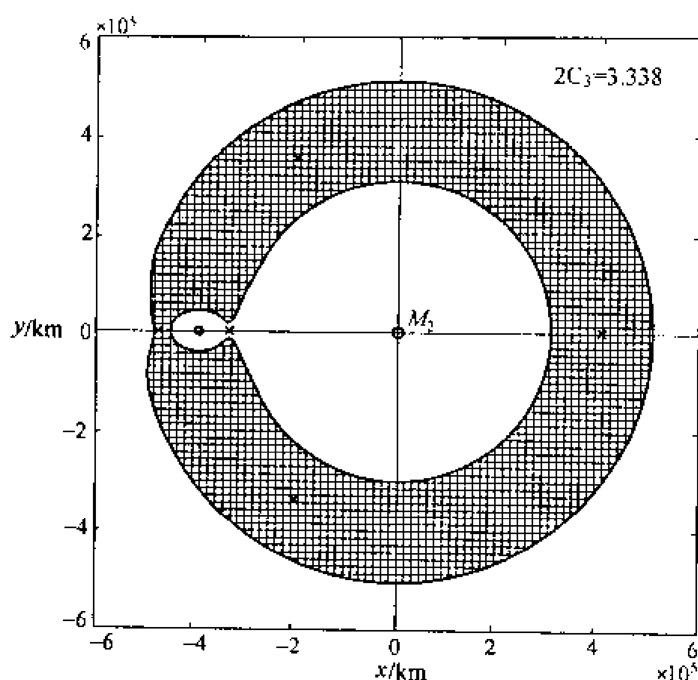


图 6.29　$C = C_3$ 时的飞行范围

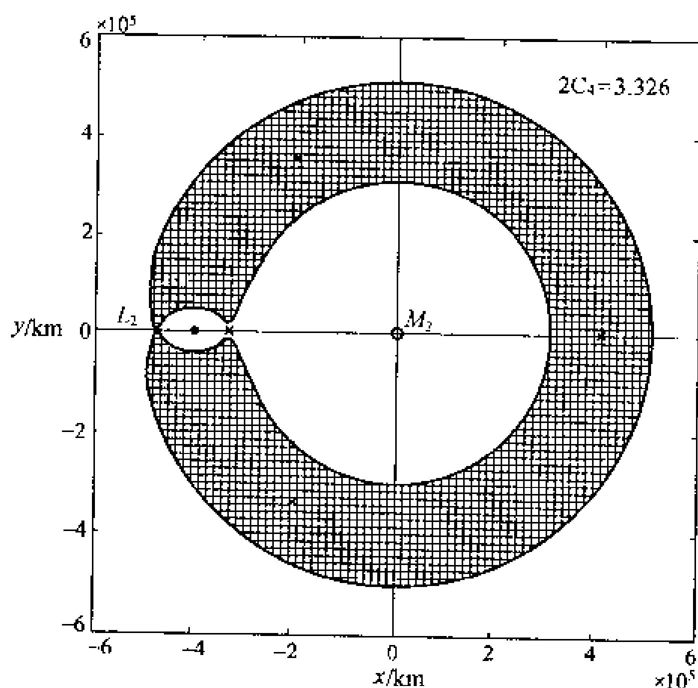


图 6.30　$C = C_4$ 时的飞行范围

若 C 继续减少，飞行器不可能飞行域也继续缩减，在 $C = C_5$ 时内外两可能飞行域以某一宽度的走廊联通(图 6.31)。

当 C 进一步减小到 C_6 时，在地球背向月球的一侧出现了第三个联通点 L_3，通过该点空间飞行器可以在内外两个可能飞行域之间飞行(图 6.32)。

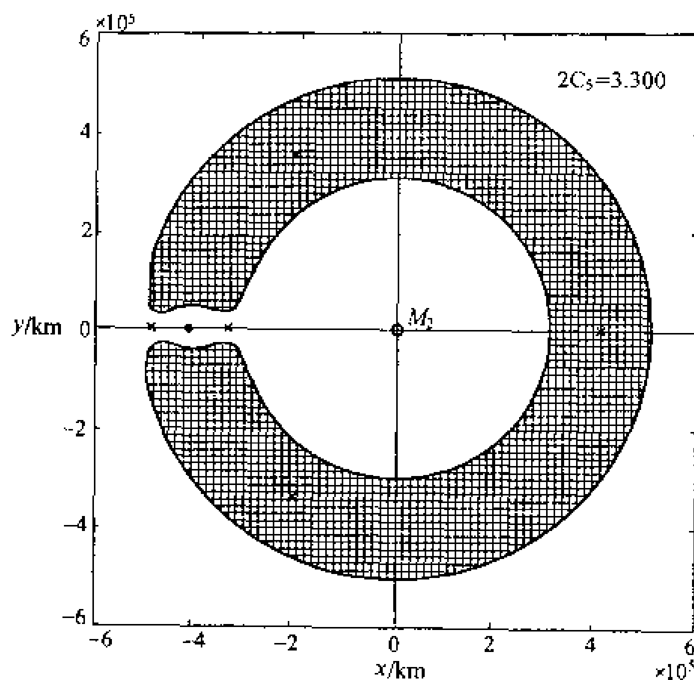


图 6.31　$C = C_5$ 时的飞行范围

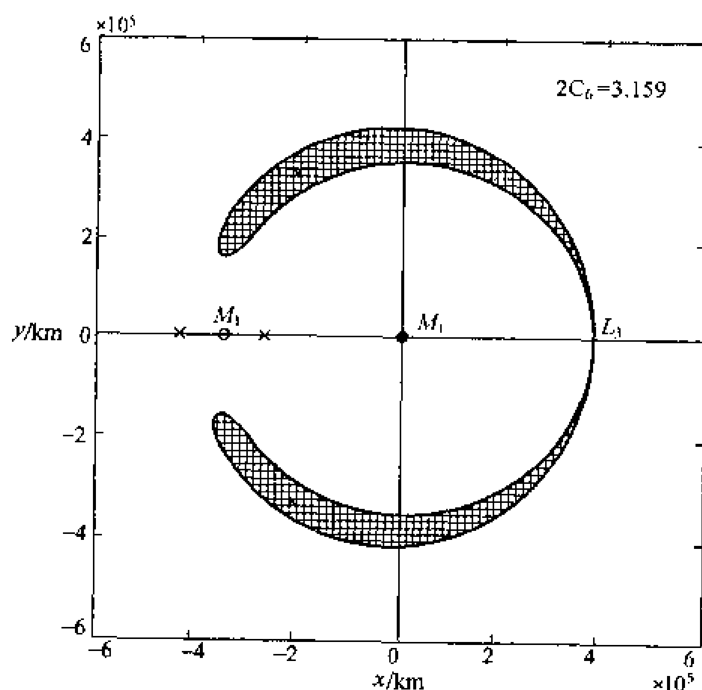


图 6.32　$C = C_6$ 时的飞行范围

C 再减为 C_7 时，L_3 处的联通点转变为联通走廊，不可能飞行域再进一步缩小(图 6.33)。

最后，当 C 减小到 C_8 时，不可能飞行区已退缩为 L_4 和 L_5 两个点(图 6.34)。把上面各图综合成一个示于图 6.35 之中。

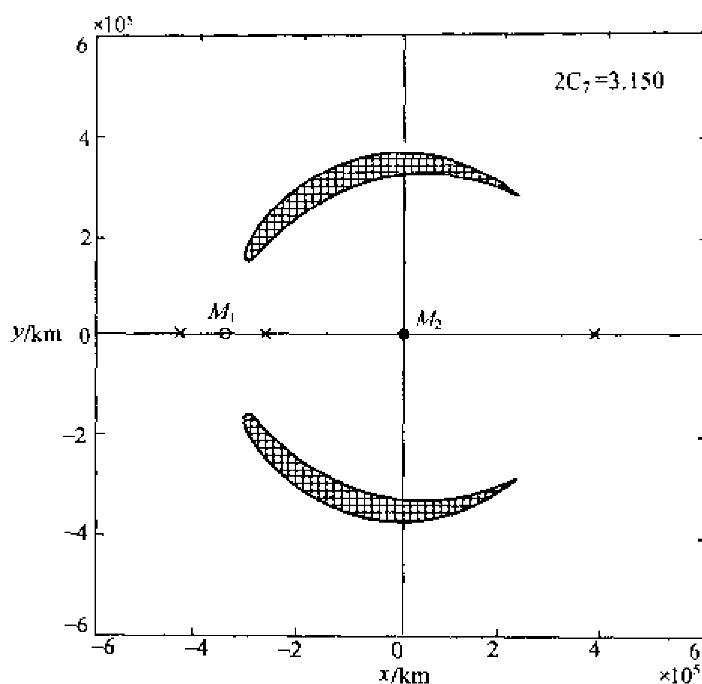


图 6.33　$C = C_7$ 时的飞行范围

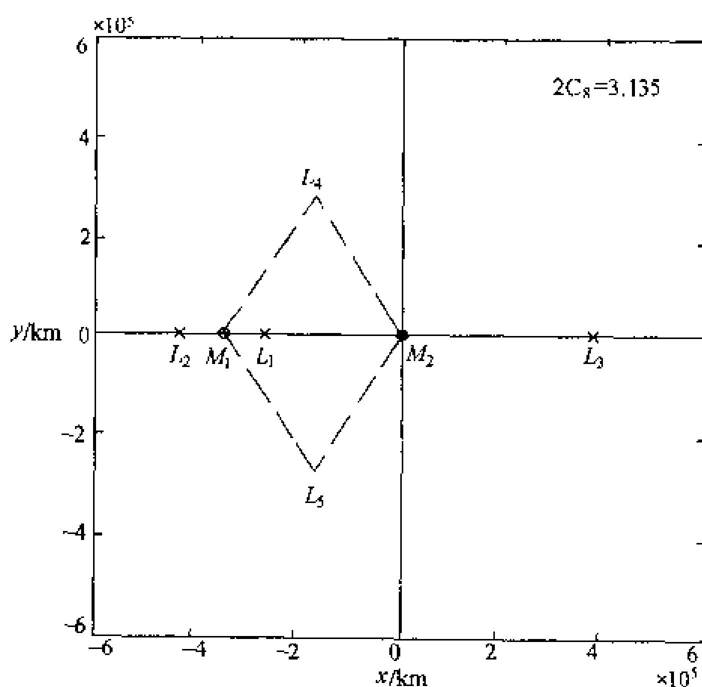


图 6.34　$C = C_8$ 时的飞行范围

图 6.34 中的 $L_1 \sim L_5$ 称为天平动点，在这五个点，空间飞行器达到静平衡。由式(6.80)和式(6.81)，令速度和加速度分量为零，静平衡条件是

$$\omega^2 x = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{6.90}$$

$$\omega^2 y = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{6.91}$$

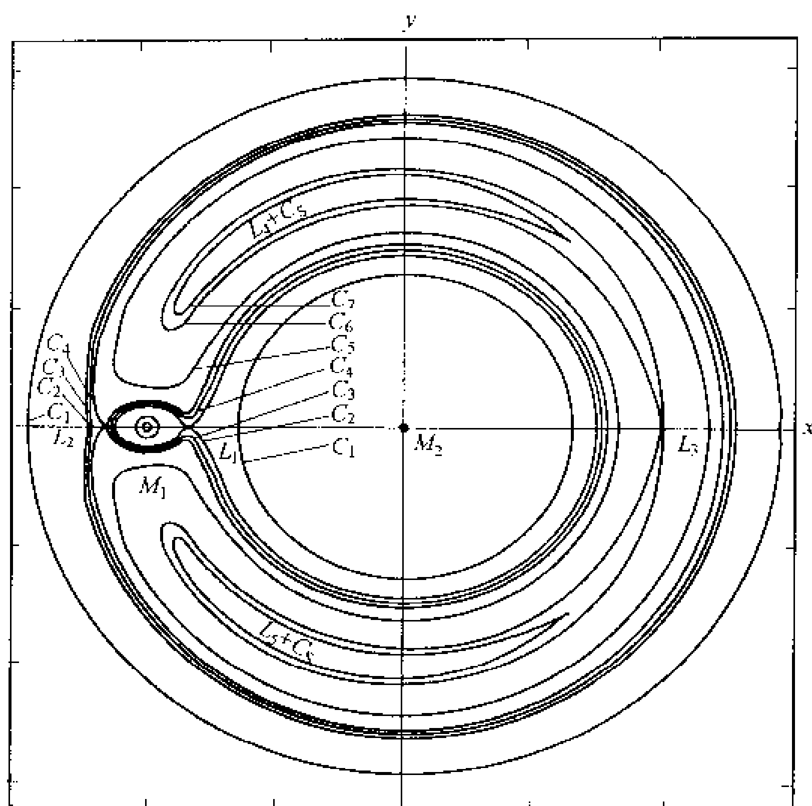


图 6.35　空间飞行器在地月系统中的飞行区域

若把式(6.73) 和式(6.74) 代入上两式,将得到

$$\omega^2 x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x + a_1) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x - a_2) = 0 \tag{6.92}$$

$$\omega^2 y - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} y = 0 \tag{6.93}$$

求解式(6.92) 和式(6.93),所得的 x, y 就是静平衡点的坐标。由式(6.93) 可得

$$y = 0 \tag{6.94}$$

将式(6.94) 代入式(6.92),考虑到式(6.71) 和式(6.72),有

$$\omega^2 x - \frac{(x + a_1)\mu_1}{|(x + a_1)^3|} - \frac{(x - a_2)\mu_2}{|(x - a_2)^3|} = F(x) = 0 \tag{6.95}$$

若令 $x = -\infty, -a_1^+, -a_1^-, -a_2^+, -a_2^-$ 和 $+\infty$,其中 a_i^- 和 $a_i^+ (i = 1,2)$ 表示 $a_i - \Delta$ 和 $a_i + \Delta$,Δ 是大于零的小量,则由式(6.95) 知

$$F(-\infty) = -\infty, F(-a_1^+) = \infty, F(-a_1^-) = -\infty, F(a_2^+) = \infty$$

$$F(a_2^-) = -\infty, F(\infty) = \infty$$

所以 $F(x)$ 在$(-\infty, \infty)$之间随 x 变化的趋势如图 6.36 所示,$F(x)$ 曲线共有三个分支,它们与 x 轴的交点对应的 x 值就是 $y = 0$ 的静平衡点的坐标,亦即图 6.35 中 $L_1(x_1, 0)$、$L_2(x_2, 0)$ 和 $L_3(x_3, 0)$ 的横坐标。

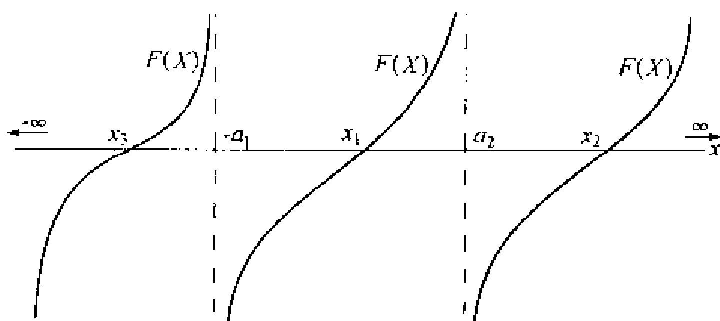


图 6.36　$F(x)$ 的变化曲线

由式(6.93) 还可以得到

$$\omega^2 - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} = 0 \tag{6.96}$$

上式乘 x 后与式(6.92) 相减,得

$$\frac{a_1\mu_1}{\rho_1^3} - \frac{a_2\mu_2}{\rho_2^3} = 0 \tag{6.97}$$

根据质心的定义有 $a_1M_1 = a_2M_2$,乘以 G 后得 $a_1\mu_1 = a_2\mu_2$,由上式得

$$\rho_1 = \rho_2 \tag{6.98}$$

代入式(6.96),又有 $\omega^2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho_1^3}$,以它与式(6.63) 相比,并考虑到 $\mu = \mu_1 + \mu_2$,还可以求得

$$\rho_1 = r = a_1 + a_2 \tag{6.99}$$

而 r 是 M_1 和 M_2 之间的距离。所以由此得知第四、五个静平衡点 L_4 和 L_5 分别与 M_1 和 M_2 构成等边三角形。对于地月系统(见图 6.35)

$$M_1L_1 = 58\,000\ \text{km}, M_1L_2 = 65\,000\ \text{km}$$

$$M_2L_3 = 380\,000\ \text{km},$$

$$M_1L_4 = M_2L_4 = M_1L_5 = M_2L_5 = R_{☾} = 384\,400\ \text{km}$$

需说明的是,L_1、L_2 和 L_3 三个平衡点是不稳定的,即放置在该点的物体一旦偏离便不再返回,而飞向别处;而 L_4 和 L_5 是稳定的静平衡点,在该点的物体出现了小偏差,还会返回原处。因此,有些人推论在这两点处会积累相当数量的空间"垃圾"。

第七章　空间飞行器的相对运动和交会对接

在交会、拦截、救生、检修、对接、大型结构的装配和卫星组网或星座等一系列飞行任务中都要研究空间飞行器之间的相对运动。

7.1　相对运动方程式

7.1.1　轨道坐标系中相对运动方程式

设有追赶和被追赶空间飞行器(后者又称目标空间飞行器或目标飞行器),取随目标空间飞行器一同运动的动坐标系 $OXYZ$(又称轨道坐标系)。原点 O 在目标飞行器质心,OY 沿地球半径方向朝外,OX 与 OY 垂直指向飞行的前方,并在目标飞行器的轨道平面内,OZ 与前两者构成右旋正交系(图 7.1)。

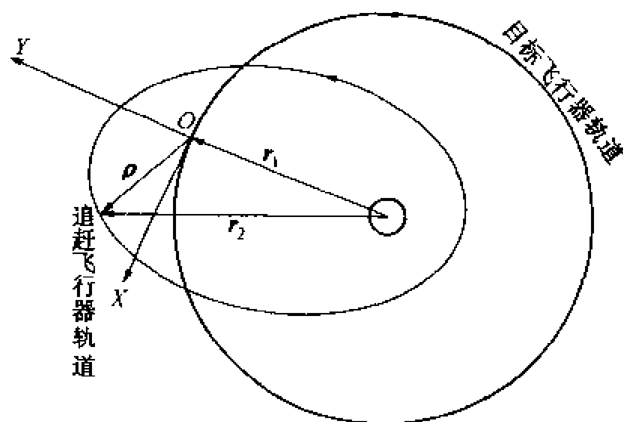


图 7.1　轨道坐标系

目标飞行器的运动方程式是(参考式(3.8))

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + \frac{\mu}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 = 0 \tag{7.1}$$

而追赶飞行器的运动方程式是

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + \frac{\mu}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{f} \tag{7.2}$$

其中,$\boldsymbol{f}$ 是追赶飞行器单位质量的作用力,其作用是使追赶飞行器追上目标飞行器。由图 7.1 知

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{7.3}$$

$\boldsymbol{\rho}$ 是两空间飞行器间的相对距离矢量。由于 $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1$,将式(7.1)和式(7.2)代入之后,有

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mu}{r_1^3}\ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \frac{\mu}{r_2^3}\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + \boldsymbol{f} \tag{7.4}$$

这是追赶飞行器相对目标飞行器的运动方程,为便于应用,下面把它改写成分量形式。令 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别为 OX,OY 和 OZ 轴的单位矢量,则有

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{k} \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

其中,x,y,z 是追赶飞行器在动坐标系中的坐标分量,ω 是目标飞行器的轨道角速度。

图 7.1 中的$\boldsymbol{\rho}$ 是在动坐标系中,它随时间的变化率,可以在固定的,也可以在活动坐标系中求导,其二阶时间导数仍如式(6.77) 所示。把式(7.5) 两式代入式(6.77) 中,考虑到对于任意形状轨道,角速度 ω 是变量,可求得

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\ddot{x} - \omega^2 x + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y)\boldsymbol{i} + (\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x)\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{7.6}$$

式(7.4) 右侧前两项也需化简,考虑到

$$\boldsymbol{r}_2 = x\boldsymbol{i} + (r_1 + y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{7.7}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = r_1\boldsymbol{j} \tag{7.8}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 &= \mu r_1^{-3}\boldsymbol{r}_1 - \mu[x^2 + (r_1 + y)^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}}(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{r}_1) = \\ &\mu r_1^{-3}\boldsymbol{r}_1 - \mu(r_1^2 + 2r_1y + \rho^2)^{-\frac{3}{2}}(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{r}_1) = \\ &\mu r_1^{-3}[\boldsymbol{s}_1 - (1 + \frac{2y}{r_1} + \frac{\rho^2}{r_1^2})^{-\frac{3}{2}}(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{r}_1)]\end{aligned} \tag{7.9}$$

当两飞行器相对距离较小时,有 $\rho << r_1, x << r_1, y << r_1, z << r_1$,它们之比的二阶项可以略去,还可以应用近似表达式

$$(1 + \alpha)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{15}{8}\alpha^2 + \cdots \qquad (\alpha < 1)$$

只保留一阶小量,使式(7.9) 简化为

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 &\cong \mu r_1^{-3}[\boldsymbol{r}_1 - (1 - 3\frac{y}{r_1})(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{r}_1)] = \\ &\mu r_1^{-3}[3\frac{y}{r_1}\boldsymbol{r}_1 - (1 - 3\frac{y}{r_1})\boldsymbol{\rho}] = \\ &\mu r_1^{-3}(-x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}) \qquad (\text{略去二阶小量})\end{aligned} \tag{7.10}$$

再将 $\boldsymbol{f}$ 表示为各坐标轴方向的控制力

$$\boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k} \tag{7.11}$$

于是利用式(7.6)、式(7.10) 和式(7.11),便可将式(7.4) 改造为分量形式

$$\begin{cases}\ddot{x} + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y - \omega^2 x = -\dfrac{\mu}{r_1^3}x + f_x \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x - \omega^2 y = 2\dfrac{\mu}{r_1^3}y + f_y \\ \ddot{z} = -\dfrac{\mu}{r_1^3}z + f_z\end{cases} \tag{7.12}$$

假如目标飞行器的运行轨道为圆形,则它的轨道角速度 ω 为常值,而且还有 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}}$,所以式(7.12) 三式还可以写成

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} = f_x \tag{7.13}$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = f_y \tag{7.14}$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = f_z \tag{7.15}$$

这就是本章研究的相对运动方程式，又称为希尔方程式(Hill's equations)，式(7.12) ~ 式(7.15) 的应用范围是相对距离小于 50 km。当 f_x、f_y 和 f_z 为任意时间函数时，它们并不存在一般解析解。

为了弄清两空间飞行器相对运动过程，先观察无外力作用情况下，式(7.13) ~ 式(7.15) 的解和两飞行器的相对运动。此时式(7.13) ~ 式(7.15) 成为

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 0 \tag{7.16}$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0 \tag{7.17}$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{7.18}$$

式(7.16) 对时间积分，得

$$\dot{x} + 2\omega y = c \tag{7.19}$$

c 是积分常数，可由初始条件 $\dot{x}(0)$ 及 $y(0)$ 决定

$$c = \dot{x}(0) + 2\omega y(0) \tag{7.20}$$

把式(7.19) 和式(7.20) 代入式(7.17)，得

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 2\omega[\dot{x}(0) + 2\omega y(0)]$$

它的解是 $y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{2}{\omega}[\dot{x}(0) + 2\omega y(0)]$，以初始条件确定积分常数 A 和 B 后求得

$$y(t) = [\frac{\dot{y}(0)}{\omega}]\sin\omega t - [\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)]\cos\omega t + [\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 4y(0)] \tag{7.21}$$

把它代入式(7.19)，考虑了式(7.20) 后，积分得

$$x(t) = \frac{2\dot{y}(0)}{\omega}\cos\omega t + 2[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)]\sin\omega t - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)]t + [x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega}] \tag{7.22}$$

z 方向的解可由式(7.18) 求得

$$z(t) = \frac{\dot{z}(0)}{\omega}\sin\omega t + z(0)\cos\omega t \tag{7.23}$$

式(7.21) ~ 式(7.23) 是两相距较近的空间飞行器，当目标飞行器作圆轨道运行时，由追踪飞行器初始位置和初始速度决定的它们在相对运动中的位置。若对它们取时间导数，还可以求得相对速度

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0)\cos\omega t + [2\dot{x}(0) + 3\omega y(0)]\sin\omega t \tag{7.24}$$

$$\dot{x}(t) = -2\dot{y}(0)\sin\omega t + 2[2\dot{x}(0) + 3\omega y(0)]\cos\omega t - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)] \tag{7.25}$$

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0)\cos\omega t - \omega z(0)\sin\omega t \tag{7.26}$$

分析式(7.21) ~ 式(7.23) 和式(7.24) ~ 式(7.26) 显见，飞行器运动方向，即 x 方向的运动幅值及速度分量是 y 方向的二倍；在 x 方向有常值的漂移速度，其位移与时间成正比，方向取决于 $\dot{x}(0)$ 和 $y(0)$ 的大小；y 方向的运动相位超前 x 方向 $\frac{\pi}{2}$；z 方向的运动，即垂直于目标飞行器轨道平面方向的运动与另外两方向的运动是解耦的。由式(7.23) 和式(7.26)

易知，z 方向的运动是简谐运动，它的振动频率和目标飞行器的角速度相同，事实上它表示追赶飞行器到目标飞行器轨道平面间距离的变化过程。

7.1.2 视线坐标系中的相对运动方程式

有时我们希望在视线坐标系内求得相对运动方程式，为了简单，将只在追赶飞行器和目标飞行器都处于同一轨道平面内时给出这一方程的推导（图 7.2）。图中 P、T 分别是追赶飞行器和目标飞行器，目标飞行器在半径为 r_1 的圆轨道上运行，追赶飞行器距中心星体的距离为 $\boldsymbol{r}_2$，两者间的相对距离是 $\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{\rho}$ 又称为视线，它与随目标飞行器一同运动的活动坐标系 TXY（轨道坐标系）的 X 轴夹角为 q，两飞行器间的中心角距离为 ϕ。

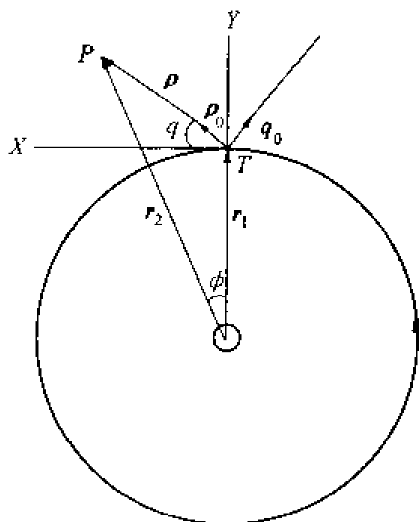


图 7.2 视线坐标系

相对运动方程式的矢量形式仍如式(7.4)所示，但因视线角 q 变化，$\boldsymbol{\rho}$ 相对 TXY 坐标系具有一角速度 $\boldsymbol{\Omega}=\dot{q}\boldsymbol{k}$。这里 $\boldsymbol{k}$ 是 TZ 轴（垂直图 7.2 纸面指向下的轴）单位矢量。再引入视线方向和与它垂直方向的单位矢量 $\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{q}_0$（见图 7.2），它们与 $\boldsymbol{k}$ 构成正交坐标系的三单位矢量，称此坐标系为视线坐标系，在这个坐标系里 $\boldsymbol{\rho}$ 的时间导数是

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}+(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{\rho} \tag{7.27}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}=\overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\rho}}+2(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}+\overset{\circ}{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{\rho}+(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times[(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{\rho}] \tag{7.28}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}$ 是目标飞行器的轨道角速度。在视线坐标系中

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\boldsymbol{\rho}_0 \tag{7.29}$$

$$\boldsymbol{\omega}=-\omega\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{\Omega}=\dot{q}\boldsymbol{k} \tag{7.30}$$

所以

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}=[\ddot{\rho}-\rho(\dot{q}-\omega)^2]\boldsymbol{\rho}_0+[2\dot{\rho}(\dot{q}-\omega)+\rho\ddot{q}]\boldsymbol{q}_0 \tag{7.31}$$

图 7.2 还有如下的几何关系

$$\sin\phi=\frac{\rho}{r_2}\cos q \tag{7.32}$$

$$\cos\phi=\frac{\rho\sin q+r_1}{r_2} \tag{7.33}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 在视线坐标系内可分解为

$$\boldsymbol{r}_1=r_1\sin q\boldsymbol{\rho}_0+r_1\cos q\boldsymbol{q}_0 \tag{7.34}$$

$$\boldsymbol{r}_2=r_2\sin(q+\phi)\boldsymbol{\rho}_0+r_2\cos(q+\phi)\boldsymbol{q}_0 \tag{7.35}$$

利用这两式，可以把式(7.4)右侧第一、二项分解为

$$\mu\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right)=\mu\left[\frac{1}{r_1^2}\sin q-\frac{1}{r_2^2}\sin(\phi+q)\right]\boldsymbol{\rho}_0+$$

$$\mu\left[\frac{1}{r_1^2}\cos q-\frac{1}{r_2^2}\cos(\phi+q)\right]\boldsymbol{q}_0$$

展开上式中的和角正弦及余弦,并以式(7.32) 和(7.33) 代入,整理后得

$$\mu[r_1(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3})\sin q-\frac{\rho}{r_2^3}]\boldsymbol{\rho}_0+\mu r_1(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3})\cos q\boldsymbol{q}_0 \tag{7.36}$$

再利用 $\rho << r_1$ 和 $\rho << r_2$ 的特点,略去$\frac{\rho^2}{r_1^2}$ 项并应用近似公式

$$(1+\Delta x)^{-m}\cong 1-m\Delta x \qquad (|\Delta x|<1, m>0)$$

可以求得

$$\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}=\frac{1}{r_1^3}(1-\frac{r_1^3}{r_2^3})=\frac{1}{r_1^3}[1-\frac{r_1^3}{(r_1^2+\rho^2+2r_1\rho_1\sin q)^{\frac{3}{2}}}]=$$

$$\frac{1}{r_1^3}[1-\frac{1}{(1+\frac{\rho^2}{r_1^2}+2\frac{\rho}{r_1}\sin q)^{\frac{3}{2}}}]\approx$$

$$\frac{1}{r_1^3}[1-(1+2\frac{\rho}{r_1}\sin q)^{-\frac{3}{2}}]\approx\frac{3\rho}{r_1^4}\sin q$$

将后者代入式(7.36),并取 $r_1\approx r_2$,可以得到

$$\mu(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3})=\frac{\mu}{r_1^3}(3\rho\sin^2 q-\rho)\boldsymbol{\rho}_0+\frac{\mu}{r_1^3}\frac{3}{2}\rho\sin 2q\boldsymbol{q}_0 \tag{7.37}$$

由于 $\mu/r^3=\omega^2$,故把式(7.37)、(7.31) 和

$$\boldsymbol{f}=f_\rho\boldsymbol{\rho}_0+f_q\boldsymbol{q}_0 \tag{7.38}$$

代入式(7.4),求得视线坐标系内的相对运动方程式是

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{q}-\omega)^2=3\rho\omega^2\sin^2 q-\rho\omega^2+f_\rho$$

$$\rho\ddot{q}+2\dot{\rho}(\dot{q}-\omega)=\frac{3}{2}\rho\omega^2\sin 2q+f_q$$

化简后,有

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{q}^2+2\omega\rho\dot{q}-3\rho w^2\sin^2 q=f_\rho \tag{7.39}$$

$$\rho\ddot{q}+2\dot{\rho}\dot{q}-2\omega\dot{\rho}-\frac{3}{2}\rho\omega^2\sin 2q=f_q \tag{7.40}$$

如果认为在控制飞行过程中,轨道角速度小于其他量,可以略去,或认为两飞行器在均匀引力场运动,上两式内有关含 ω 的项均可略去,便有

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{q}^2=f_\rho \tag{7.41}$$

$$\rho\ddot{q}+2\dot{\rho}\dot{q}=f_q \tag{7.42}$$

7.2　空间飞行器的交会和对接

使两空间飞行器在轨道上相遇的飞行过程叫做交会,使两飞行器在交会后,相对速度为零的过程则被称为对接。

交会和对接是十分有用的飞行操作,它可以用在空间站和飞船、飞船与飞船或任意两空间飞行器之间人员交换、载荷装卸、在轨检修、人员拯救以及空间装配或建筑等一系列

任务之中。

两空间飞行器做交会对接时，通常都是一个飞行器在轨被动飞行，称为目标飞行器；另一飞行器在控制力的作用下作机动飞行，以不同规律飞向目标飞行器，它又称为追赶飞行器。

为了简化交会对接技术，常令目标飞行器在圆或近圆轨道上飞行，追赶飞行器则先射入或机动到与目标飞行器共面的椭圆或圆轨道，后者可以高于或低于前者，称为过渡轨道。待到合适的时刻开始交会或对接的过程。

整个交会对接的过程，按变轨控制的方法和要求的不同可以划分为四个阶段，图 7.3。

(1) 地面导引段　当目标飞行器在 1′ 点，追赶飞行器在 1 点时，恰为交会对接窗口，在地面站的导引下，追赶飞行器沿椭圆轨道飞向比目标飞行器低(或高)数十公里(如 30 ~ 50 km)的圆形停泊轨道。此阶段的终点，两飞行器分别在点 2′ 和 2。

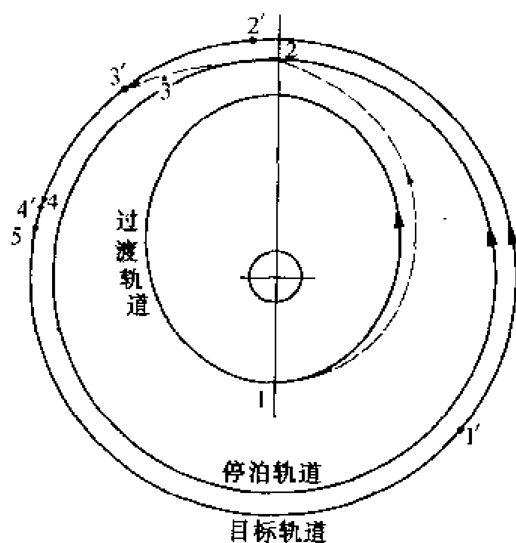


图 7.3　交会对接的过程

(2) 自动寻的阶段　当追赶飞行器在距目标飞行器 100 km 左右及更近时，星上微波雷达或激光雷达(或其他探测装置)已能捕获目标，就可以开始作自动寻的飞行。这个阶段除雷达外，还要应用陀螺器件及红外地平仪、太阳敏感器等测量装置，在它们的协助下，根据不同的导引规律将追赶飞行器引向目标飞行器，图 7.3 中 2′ 至 3′ 和 2 至 3 分别是两飞行器的飞行路线。

(3) 最后逼近段　当两空间飞行器达到相距约 5 km 的点 3 和 3′ 后，先主动保持距离，等待有利时机进行最后逼近。在最后逼近段仍然利用星载测量装置，控制追赶飞行器进一步靠近目标飞行器。这阶段的接近速度进一步降低，距离测量精度提高，使追赶飞行器直接或绕飞进入对接走廊。一旦捕获对接走廊，追赶飞行器就停止机动(如图中 7.3 的点 4 和 4′)，并利用摄像机捕获目标。这时相对距离约为数百米左右。

(4) 对接合拢阶段　当摄像机捕获目标，且相对距离测量装酌精确测得相对距离和姿态数据并对准对接轴后，就可以开始对接合拢操作。这个阶段应保持接近速度进一步放慢，维持姿态稳定，平稳地平移接近目标飞行器，直到相距约 1.5m 左右时停止。然后在更准确的测量和控制下，移动到更近的距离，停止后借助对接机构完成两空间飞行器的机械联接，或经慢速飞行的轻微撞击使对接机构互锁而联接。

地面导引段，事实上和前面叙述过的两圆轨道间过渡并无二致，本节不再赘述。

自动寻的阶段，要进行较精确的轨道飞行，导引控制率可以有多种，比较常用的有：

(a) **多脉冲交会**

这种交会方法的基础是圆轨道相对运动方程式(7.16) ~ 式(7.18)或希尔方程式的齐次形式，即

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 1 \tag{7.16}$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0 \tag{7.17}$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{7.18}$$

它们的解如式(7.21) ~ 式(7.26)。如果以初始时刻的速度脉冲控制追赶飞行器飞向目标飞行器,并经过 T 时间后达到目标飞行器,则在 $t = T$ 瞬间,两飞行器相遇时有 $x(T) = y(T) = z(T) = 0$。把这些关系代入式(7.21) ~ 式(7.23),得

$$\frac{\dot{y}(0)}{\omega}\sin\omega T - [2\frac{\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)]\cos\omega T + [\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 4y(0)] = 0$$

$$\frac{2\dot{y}(0)}{\omega}\cos\omega T + 2[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)]\sin\omega T - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)]T + [x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega}] = 0$$

$$\frac{\dot{z}(0)}{\omega}\sin\omega T + z(0)\cos\omega T = 0$$

上述三方程中,初始时刻两飞行器间的距离 $x(0)$、$y(0)$ 和 $z(0)$ 若是已知量,T 为合理的给定值,则可以据此算出所需的初始速度脉冲 $\dot{x}$、$\dot{y}(0)$ 和 $\dot{z}(0)$,它们将保证经过 T 时后使两飞行器相遇。解上述三式,得

$$\dot{x}(0) = \omega\frac{a_{11}}{b}x(0) + \omega\frac{a_{12}}{b}y(0) \tag{7.43}$$

$$\dot{y}(0) = \omega\frac{a_{21}}{b}x(0) + \omega\frac{a_{22}}{b}y(0) \tag{7.44}$$

$$\dot{z}(0) = \omega a_{33}z(0) \tag{7.45}$$

其中,

$$a_{11} = \sin\omega T, a_{12} = 14(1 - \cos\omega T) - 6\omega T\sin\omega T \tag{7.46}$$

$$a_{21} = -2(1 - \cos\omega T), a_{22} = 4\sin\omega T - 3\omega T\cos\omega T \tag{7.47}$$

$$a_{33} = -\cot\omega T, b = 3\omega T\sin\omega T - 8(1 - \cos\omega T) \tag{7.48}$$

如果追赶飞行器在 $t = 0$ 时刻原有的速度分量是 $\dot{x}_\rho(0)$、$\dot{y}_\rho(0)$ 和 $\dot{z}_\rho(0)$,则尚需给它增加的速度是

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_\rho(0), \dot{y}_1(0) = \dot{y}(0) - \dot{y}_\rho(0), \dot{z}_1(0) = \dot{z}(0) - \dot{z}_\rho(0) \tag{7.49}$$

如以矩阵将上述速度分量和坐标初值写成

$$\begin{aligned} \underline{v}_1(0) &= [\dot{x}_1(0) \quad \dot{y}_1(0) \quad \dot{z}_1(0)]^T \\ \underline{v}_\rho(0) &= [\dot{x}_\rho(0) \quad \dot{y}_\rho(0) \quad \dot{z}_\rho(0)]^T \\ \underline{\rho}(0) &= [x(0) \quad y(0) \quad z(0)]^T \end{aligned} \tag{7.50}$$

则由式(7.43) ~ 式(7.45)可以求得让追赶飞行器在 T 时间间隔内,从初始距离为 $x(0)$,$y(0)$ 和 $z(0)$ 达到与目标飞行器相遇所需的速度增量

$$\underline{v}_1(0) = \omega\begin{bmatrix} a_{11}/b & a_{12}/b & 0 \\ a_{21}/b & a_{22}/b & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\underline{\rho}(0) - \underline{v}_\rho(0) \tag{7.51}$$

当 $t = T$ 时刻两飞行器相遇时,追赶飞行器的速度可由式(7.24) ~ 式(7.26)算出,只

要令式中的 $t=T$,$x(0)$、$y(0)$、$z(0)$ 和 $\dot{x}(0)$、$\dot{y}(0)$、$\dot{z}(0)$ 仍取如上数值即可。如欲使它们与目标飞行器的相对速度为零,则应向相反方向施加数值相同的速度脉冲

$$\underline{v}_2(T)=[\dot{x}_2(T)\quad \dot{y}_2(T)\quad \dot{z}_2(T)]^T$$

$$\underline{v}_2(T)=-\left\{\omega\begin{bmatrix}4\cos\omega T-3 & -2\sin\omega T & 0\\ 2\sin\omega T & \cos\omega T & 0\\ 0 & 0 & \cos\omega T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}/b & a_{12}/b & 0\\ a_{21}/b & a_{22}/b & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -6\omega(1-\cos\omega T) & 0\\ 0 & 3\omega\sin\omega T & 0\\ 0 & 0 & -\omega\sin\omega T\end{bmatrix}\right\}\underline{\rho}(0) \tag{7.52}$$

利用这种方法进行交会对接的关键是开始时间 t_0 和终止时间 $t_f(T=t_f-t_0)$ 的选择。一般说,有三种选择方式:(1) t_0 和 T 都任意;(2) t_0 固定但 T 任意;(3) t_0 和 T 均固定。

第一种方式,虽有可能获得最小能量消耗的交会对接,但实际上都却很少能实现。

第三种方式,相当于指定交会对接的起始和终止点,在指定不恰当时,可能得到的速度 $v_1(0)$ 和 $v_2(T)$ 过大,能量消耗太多。遇到这种情况,可以在初始和最终时刻之间增加一些中间点,并利用速度脉冲使空间飞行器经过每一中间点,分步地到达终点,就是多脉冲控制方案。

第二种方式比较实用,可以指定开始时刻 t_0 和最大的交会对接时间 T,在这两个件条下,选取初始和终止速度脉冲。

【例1】 有两飞行器在同平面圆轨道上飞行,目标飞行器的轨道半径为 $r_T=6\,850$ km,追赶飞行器的轨道半径是 $r_P=6\,600$ km(图 7.4),在 $t=0$ 时刻追赶飞行器 P 在目标飞行器 T 后面 $\phi=4.904°$,试决定经过 $T=2\,744$ s 后,目标飞行器被赶上所需的速度脉冲,并绘出相对运动坐标中的轨迹和相对速度。

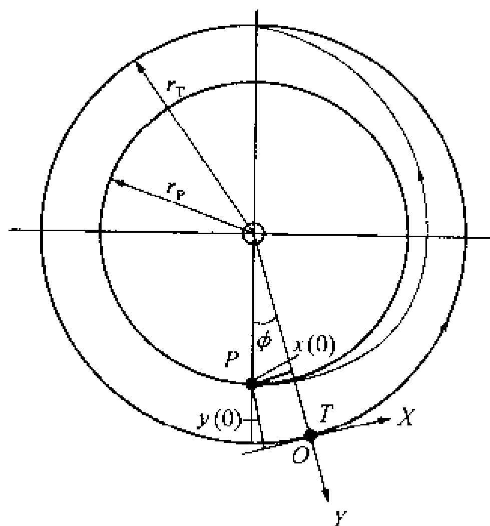


图 7.4 交会过程

【解】在 $t=0$ 时刻追赶飞行器 P 的初始位置是

$$x(0)=-r_P\sin\phi=-564.264\ (\text{km})$$

$$y(0)=-(r_T-r_P\cos\phi)=-274.165\ (\text{km})$$

当 $T=2\,744$ s,$\omega=(\mu_{\oplus}/r_T^3)^{\frac{1}{2}}=1.113\,6\times10^{-3}$ rad·s^{-1} 时,应用式(7.46) ~ 式(7.48)求得

$$a_{11}=0.085\,77,a_{12}=26.38,a_{21}=-3.993$$

$$a_{22}=9.476,b=-15.18$$

因而从式(7.43)和式(7.44),还可计算出

$$\dot{x}(0)=0.533\,9\ \text{km/s},\dot{y}(0)=0.025\,31\ \text{km/s} \tag{7.53}$$

利用它们可使追赶飞行器在 $t=T$ 时刻内与目标飞行器相遇。在 $0\le t\le T$ 间,追赶飞行器坐标可用式(7.21)和式(7.22)计算。计算结果见表 7.1 和图 7.5(a),它在惯性坐标系(地心坐标系)内的轨迹见图 7.4。飞行器的相对速度由式(7.24)和式(7.25)计算,结果见

表 7.1 和图 7.5(b)。

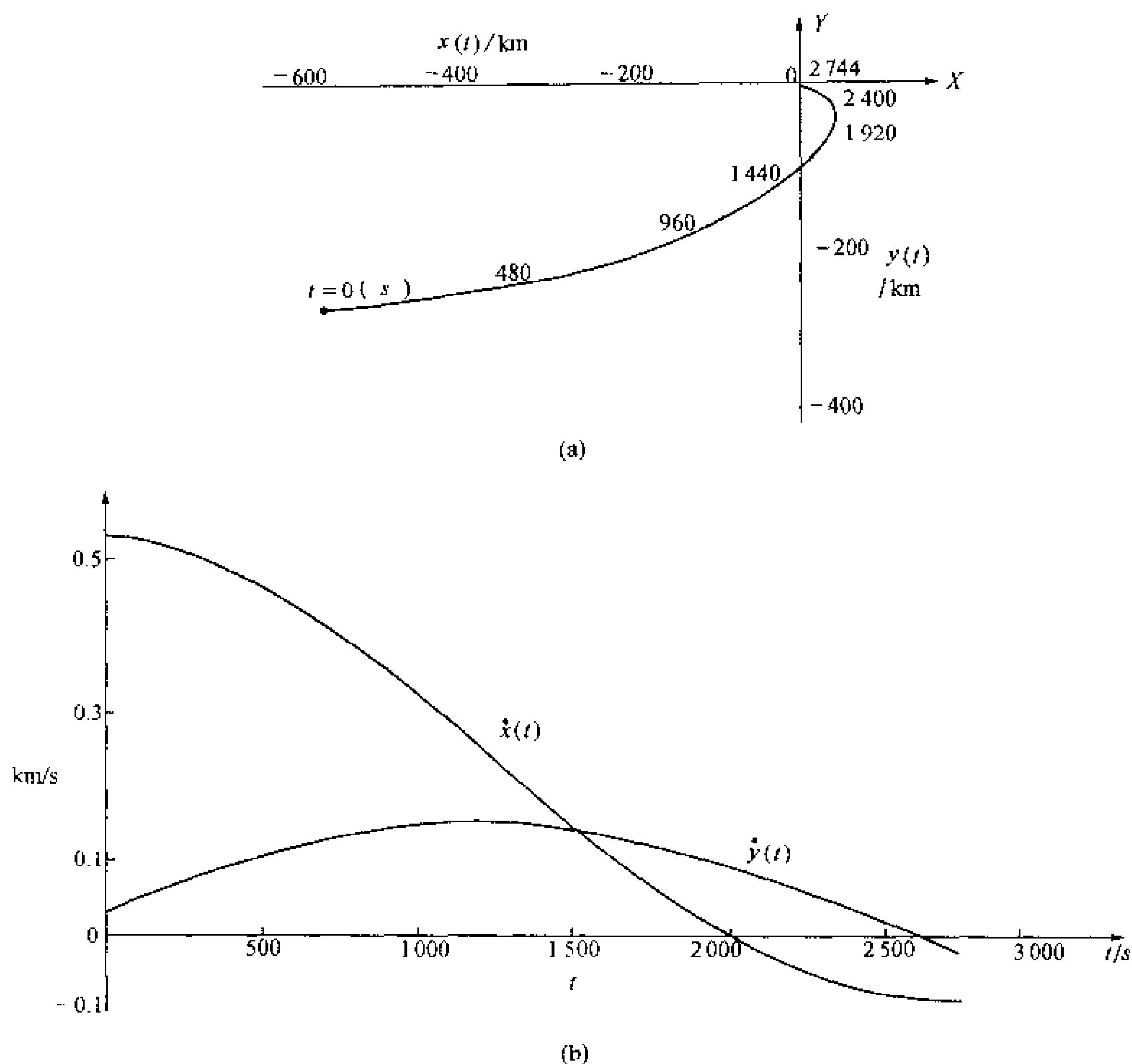


图 7.5　相对位置与速度

表 7.1　相对运动结果

t/s	0	480	960	1 440	1 920	2 400	2 744
$x(t)$/km	-564.264	-321.178	-127.77	-7.16	37.81	25.43	0
$y(t)$/km	-274.165	-243.56	-183.48	-110.62	-45.36	-5.89	0
$\dot{x}(t)/(\mathrm{km}\cdot s^{-1})$	0.534	0.466	0.333	0.170	0.024 3	-0.063 6	-0.076 8
$\dot{y}(t)/(\mathrm{km}\cdot s^{-1})$	0.025 3	0.099 1	0.145	0.151	0.114	0.046 1	-0.012 2

如欲使两空间飞行器在相遇之际,相对速度为零(对接),还应算出相遇时需加的速度脉冲。为此,从表 7.1 中取出 $t = T$ 时刻的速度

$$\dot{x}(T) = -0.076\,8\ \mathrm{km/s}$$

$$\dot{y}(T) = -0.012\,2\ \mathrm{km/s}$$

为抵消它们,应施加的速度脉冲数量需与之相同,但方向应相反。

b 平行接近法

追赶飞行器的相对速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 如能随时都指向目标飞行器，最终定会追上它，若两飞行器都作等速直线运动，则视线将不改变方向(图7.6a)，称为平行接近的飞行或平行接近导引。图中 T_1、$T_2\cdots$ 是目标飞行器在相同时间间隔内飞行经过的点，P_1、$P_2\cdots$ 是追赶飞行器对应点，$\boldsymbol{v}_T$，$\boldsymbol{v}_P$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别是目标飞行器、追赶飞行器和它们之间的相对速度。显然两飞行器将在 n 点相遇。同样的原理也可以解释两沿非直线轨道运行的空间飞行器之间的相互运动(图 7.6b)，只是在不同的时刻，两飞行器的速度和方向应该有适当的关系，以保持相对速度 $\boldsymbol{v}_i(t)$ 方向不变(数值可变)，这就是我们本节所谓的平行接近法。

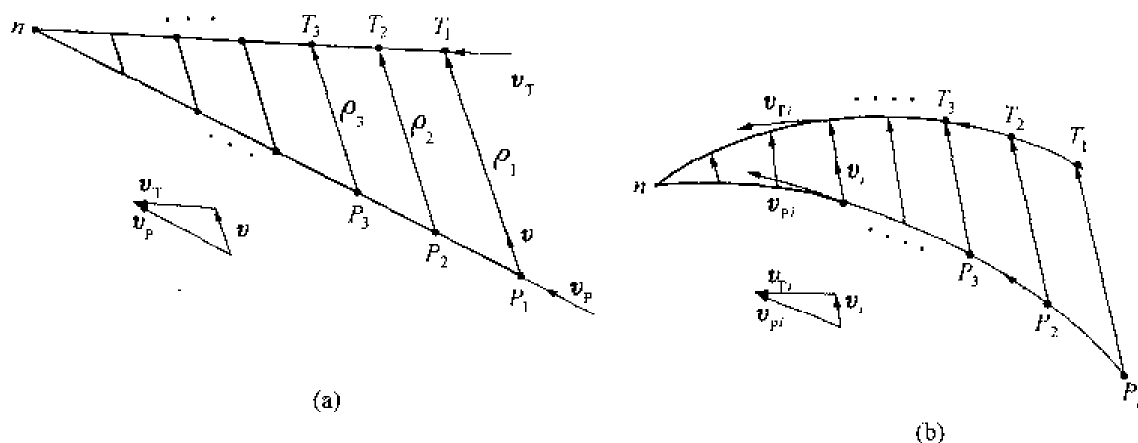


图 7.6　平行接近法

两空间飞行器之间的平行接近法，可以分为视线在惯性参考系，即固联在中心星体的坐标系中相互平行的，和在动坐标系(如图 7.2 中的 $TXYZ$) 中相互平行的两种，下面主要研究后者。

为了简便，从忽略了坐标系轨道角速度 ω 影响的方程组式(7.41) 和式(7.42) 出发，即

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q}^2 = f_\rho \tag{7.54}$$

$$\rho q + 2\dot{\rho}\dot{q} = f_q \tag{7.55}$$

从节约能量的原则出发，可利用追赶飞行器和目标飞行器轨道运动的速度差，使它们相互接近，这种情况下无需施加视线方向的控制力 f_ρ，这时与之垂直方向的 f_q 力的作用，主要是维持视线角速度为零，以保证平行接近法的实现。因此，上述两方程式成为

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q} = 0 \tag{7.56}$$

$$\rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q} = f_q \tag{7.57}$$

对上两式的一般情况求解是困难的，下面将在特殊条件下研究它们[7]。

在理想的情况下，控制系统将维持 $\dot{q} = 0$，式(7.56) 成为 $\ddot{\rho} = 0$，因此

$$\rho = \rho(0) + \dot{\rho}(0)t \tag{7.58}$$

其中，$\rho(0)$ 和 $\dot{\rho}(0)$ 是 $t = 0$ 时两飞行器间的距离和相对速度。然而 $\dot{q} = 0$ 的条件并非随时都能保持，为导出 q 的变化规律，把式(7.58) 代入式(7.57)，得

$$\ddot{q} + \frac{2\dot{\rho}\dot{q}}{\rho(0) + \dot{\rho}(0)t} = \frac{f_q}{\rho(0) + \dot{\rho}(0)t}$$

上式的 f_q 为恒定值时，其解是[8]

$$\dot{q}=\frac{1}{\rho^2}\left\{f_q\left[\rho(0)t+\dot{\rho}(0)\frac{t^2}{2}\right]+\dot{q}(0)\rho^2(0)\right\} \tag{7.59}$$

其中，$\dot{q}(0)$ 是 $t=0$ 时的视线角速度，在给定 f_q 时，就可由上式算得 $\dot{q}$。当时间 t 较短时，可视 f_q 为不变，为等加速度运动，显然有 $\dot{q}\rho=f_q t$，把式(7.59) 代入后，得

$$f_q t=\frac{1}{\rho}\left\{f_q\left[\rho(0)t+\dot{\rho}(0)\frac{t^2}{2}\right]+\dot{q}(0)\rho^2(0)\right\}$$

再把式(7.58) 代入，最后求得

$$f_q=\frac{\rho^2(0)\dot{q}(0)}{0.5\dot{\rho}(0)t^2}$$

把它代入式(7.59)，得角速度值

$$\dot{q}=\frac{2\rho^2(0)\dot{q}(0)}{\rho^2}\left(\frac{\rho(0)}{\dot{\rho}(0)t}+1\right) \tag{7.60}$$

另一种特殊情形就是 $\dot{q}=\text{const}$，此时式(7.54) 和式(7.55) 成为

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{q}^2=0 \tag{7.61}$$

$$2\dot{\rho}\dot{q}=f_q \tag{7.62}$$

式(7.61) 乘以 $\dot{\rho}$ 再对时间积分，得

$$\dot{\rho}^2-\rho^2\dot{q}^2=c \tag{7.63}$$

其中，c 是积分常数，由初始条件求得

$$c=\dot{\rho}^2(0)-\rho^2(0)\dot{q}^2(0) \tag{7.64}$$

为进一步改造式(7.63)，先观察图 7.7。图中 T 和 P 分别是目标和追赶飞行器，两者间的相对速度 v 与视线 $\rho(0)$ 不重合，它与目标飞行器间的距离是 h_0，如取

$$k=\frac{\rho(0)}{h_0} \tag{7.65}$$

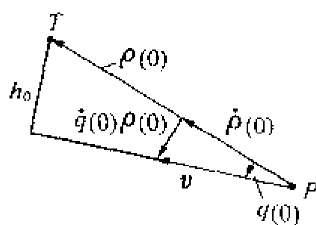


图 7.7 速度关系

并由图 7.7 写出

$$\dot{\rho}^2(0)+\rho^2(0)\dot{q}^2(0)=v^2$$

移项整理并考虑到图中两相似三角形关系和式(7.65)，有

$$\frac{\dot{\rho}^2(0)}{\dot{q}^2(0)}=\rho^2(0)\left(\frac{v^2}{\rho^2(0)\dot{q}^2(0)}-1\right)=\rho^2(0)\left(\frac{\rho^2(0)}{h_0^2}-1\right)=\rho^2(0)(k^2-1) \tag{7.66}$$

再取 $c/\dot{q}^2$，将式(7.64) 代入并考虑到 $\dot{q}=\text{const}=\dot{q}(0)$ 的条件，还可写出

$$\frac{c}{\dot{q}^2}=\frac{\dot{\rho}^2(0)}{\dot{q}^2(0)}-\rho^2(0)=\rho^2(0)(k^2-2) \tag{7.67}$$

利用式(7.67) 的关系，以 $\dot{q}^2$ 除式(7.63)，可以得到不显含时间变量的方程式

$$\left(\frac{d\rho}{dq}\right)^2-\rho^2=\rho^2(0)(k^2-2) \tag{7.68}$$

如引入无因次视线长度

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho(0)} \tag{7.69}$$

则式(7.68) 又可改写为

$$\left(\frac{d\bar{\rho}}{dq}\right)^2 - \bar{\rho}^2 = k^2 - 2 \tag{7.70}$$

它的解是[9]

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\{(1 + \sqrt{k^2 - 1})\exp[\mp(q - q(0))] - (\sqrt{k^2 - 1} - 1)\exp[\pm(q - q(0))]\} \tag{7.71}$$

式中,上面的符号是对于两飞行器接近的情况,下面的符号是远离的情况。对式(7.71) 取时间导数,代入式(7.62) 即可求得所需的控制力 f_q。由式(7.70) 显见

$$\frac{d\bar{\rho}}{dq} = \pm\sqrt{\bar{\rho}^2 + k^2 - 2} \tag{7.72}$$

因此,$\bar{\rho} \geq \sqrt{2 - k^2}$ 才有意义,而据式(7.65) 和图 7.7 可知 k 只能是大于和等于 1。

当 $k = 1$,即 ν 与 $\rho(0)$ 垂直或 $q(0) = \frac{\pi}{2}$ 时,式(7.71) 成为

$$\bar{\rho}(0) = \frac{1}{2}[\exp(q - q(0)) + \exp(q(0) - q)] \tag{7.73}$$

$\bar{\rho}$ 将随$(q - q(0))$的增加而增加,这可由图 7.8 看出。该图还据式(7.71) 以 k 为参数绘出另两组曲线,a 组曲线是取式(7.71) 中下面的符号,而 b 是取上面符号的,两组的交界恰是 $k = 1$ 的曲线。

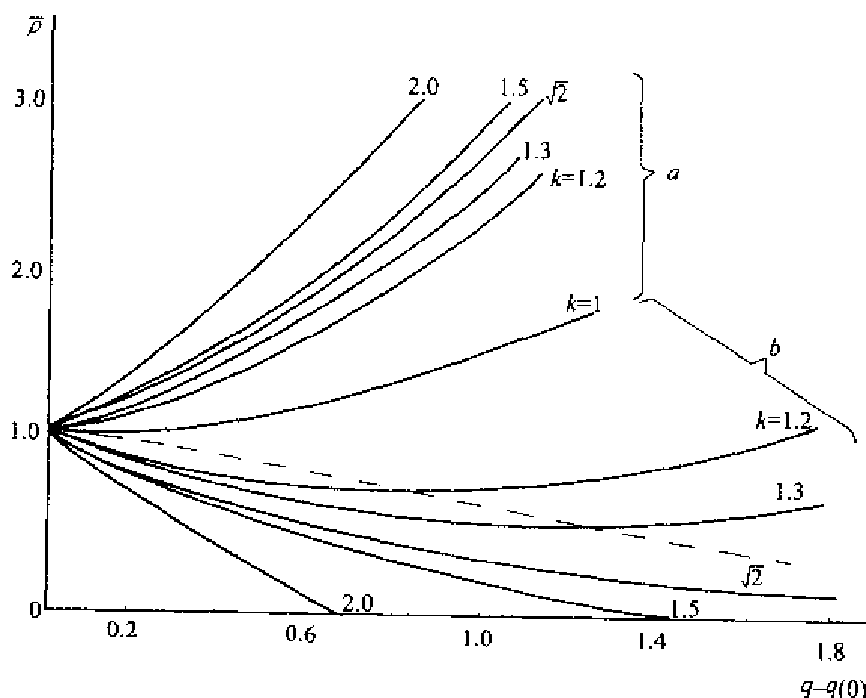


图 7.8　$\bar{\rho}$ 的变化曲线

当 $1 < k < \sqrt{2}\ (\frac{\pi}{2} > q(0) > \frac{\pi}{4})$ 时，若取式(7.71)上面的符号(接近过程)，当 $q - q(0)$ 较小时，$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}q}$ 为负，即 $\bar{\rho}$ 随 $q - q(0)$ 的增加而减少，直至 $\bar{\rho} = \sqrt{2 - k^2}$ 点(图 7.8 中的虚线) $\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}q}$ 转为零，$q - q(0)$ 再增加，上述导数转变为正，$\bar{\rho}$ 将随着 $q - q(0)$ 的增加而渐渐增加。

当 $k = \sqrt{2}(q(0) = \frac{\pi}{4})$ 时，式(7.71)成为

$$\bar{\rho} = \exp[\mp(q - q(0))] \tag{7.74}$$

上面的符号表示两飞船将逐渐接近，下面符号则表示远离。

当 $k > \sqrt{2}(q(0) < \frac{\pi}{4})$，曲线上 $\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}q} = 0$ 的点消失，导数单调变化，追赶飞行器要么单调地远离，要么单调地接近目标飞行器。

由图 7.8 的曲线可以得出如下结论。

(1) 当 $k \geq \sqrt{2}\ (q(0) \leq \frac{\pi}{4})$ 时，对于 $\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}q} < 0$ 的情况，追赶飞行器将单调地接近目标飞行器，只有 $K = \sqrt{2}$ 的情况接触时相对速度为零，其他情况有撞击。

(2) 当 $1 < k < \sqrt{2}(\frac{\pi}{2} > q(0) > \frac{\pi}{4})$ 时，在 $q - q(0)$ 较小处，随着 $q - q(0)$ 的增加，追赶飞行器接近目标飞行器，在 $\bar{\rho} = \sqrt{2 - k^2}$ 时两者最接近，其后当 $q - q(0)$ 增大时，变为远离目标飞行器。

c 渐近接近法

当应用式(7.41)和式(7.42)两式时，若取

$$f_\rho = -2b_1\dot{\rho} - \rho\dot{q}^2 - b_2\rho \tag{7.75}$$

$$f_q = -2b_3\rho\dot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q} - b_4 q\rho \tag{7.76}$$

则有

$$\ddot{\rho} + 2b_1\dot{\rho} + b_2\rho = 0 \tag{7.77}$$

$$\ddot{q} + 2b_3\dot{q} + b_4 q = 0 \tag{7.78}$$

如果取

$$b_1^2 > b_2 > 0, b_3^2 < b_4 \tag{7.79}$$

则式(7.77)和式(7.78)的解是

$$\rho(t) = \frac{\lambda_2\rho(0) + \dot{\rho}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1\rho(0) + \dot{\rho}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \tag{7.80}$$

$$q(t) = \mathrm{e}^{-b_3 t}\left\{\left[\frac{\dot{q}(0)}{\Omega} + \frac{b_3}{\Omega}q(0)\right]\sin\Omega t + q(0)\cos\Omega t\right\} \tag{7.81}$$

其中，$\rho(0)$、$\dot{\rho}(0)$、$q(0)$ 和 $\dot{q}(0)$ 是相应量的初始值，而

$$\lambda_1 = b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2}, \lambda_2 = b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2} \tag{7.82}$$

$$\Omega = \sqrt{b_4 - b_3^2} \tag{7.83}$$

这就是说,引入式(7.75)和式(7.76)的反馈控制律后,原相互耦合的相对运动方程式(7.41)和式(7.42)成为解耦的了,并且视线 $\rho(t)$ 和视线角 $q(t)$ 都渐近地趋近于零,即两飞行器最终地相遇到一起,且无碰撞。

由于式(7.80)和式(7.81)都是按指数律变化的,这种接近方法又被称为指数接近律。渐近接近法还可以从式(7.13)和式(7.14)出发,若取

$$f_x = -2c_1\dot{x} - c_2x + 2\omega\dot{y} \tag{7.84}$$

$$f_y = -2c_3\dot{y} - c_4y - 2\omega\dot{x} \tag{7.85}$$

则式(7.13)和式(7.14)成为

$$\ddot{x} + 2c_1\dot{x} + c_2x = 0 \tag{7.86}$$

$$\ddot{y} + 2c_3\dot{y} + (c_4 - 3\omega^2)y = 0 \tag{7.87}$$

如取

$$c_1^2 < c_2, c_3^2 < (c_4 - 3\omega^2) \tag{7.88}$$

并令

$$\Omega_x = \sqrt{c_2 - c_1^2}, \Omega_y = \sqrt{c_4 - 3\omega^2 - c_3^2} \tag{7.89}$$

则式(7.86)和式(7.87)的解是

$$x(t) = e^{-c_1t}\left\{\left[\frac{\dot{x}(0)}{\Omega_x} + \frac{c_1}{\Omega_x}x(0)\right]\sin\Omega_xt + x(0)\cos\Omega_xt\right\} \tag{7.90}$$

$$y(t) = e^{-c_3t}\left\{\left[\frac{\dot{y}(0)}{\Omega_y} + \frac{c_3}{\Omega_y}y(0)\right]\sin\Omega_yt + y(0)\cos\Omega_yt\right\} \tag{7.91}$$

可见追赶飞行器向目标飞行器靠近的过程同样是渐近的或按指数规律进行的。

在上述两个坐标系内,只要选择合适的 $b_1, b_2, \cdots$ 或 $c_1, c_2, \cdots$ 就可以获得不同的交会对接过程。

d 按最优控制律的交会方法

为了简化问题的说明,令式(7.13)和式(7.14)中的含 ω 项是小量,将它们略掉,因而有

$$\ddot{x} = f_x \tag{7.92}$$

$$\ddot{y} = f_y \tag{7.93}$$

这相当于在无重力空间的两维运动。如设 f_x 和 f_y 是开关控制量,即

$$f_i = \begin{cases} f_i \\ 0, & i = x, y \\ -f_i \end{cases} \tag{7.94}$$

它有三个可能的取值,即 f_i, $-f_i$ 和 0,其中 f_i = const。

首先分析相平面中的运动规律,取 x 方向为例,对式(7.92)做两次积分,得

$$\dot{x}(t) = f_xt + \dot{x}(0) \tag{7.95}$$

$$x(t) = \frac{f_xt^2}{2} + \dot{x}(0)t + x(0) \tag{7.96}$$

由上两式消去 t 后,得

$$x(t) - \frac{\dot{x}^2(t)}{2f_x} = x(0) - \frac{\dot{x}^2(0)}{2f_x} \tag{7.97}$$

其中，$x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 是 X 方向的初始位置和初始速度。

式(7.97) 式描述了一组曲线，假定其右侧为 c，则式(7.97) 可以写成

$$x(t) - \frac{\dot{x}^2(t)}{2f_x} = c \tag{7.98}$$

$$c = x(0) - \frac{\dot{x}^2(0)}{2f_x} \tag{7.99}$$

在相平面上，所描述的曲线族见图 7.9。这是一组抛物线，它们对称于 x 轴。当 $c = 0$ 时，抛物线在原点与 $\dot{X}$ 轴相切；当 $c = c_1$ 时，抛物线平行地向右(如 $c_1 > 0$) 或左(如 $c_1 < 0$) 移动一个距离 $x = c_1$。每条曲线都表示在 c 和 f_x 值条件下追赶飞行器的运动状态，即它在每一时刻的位置和速度的关系，其中 $c = 0$ 的曲线能使两飞行器相遇。图示曲线组都是对于 $f_x > 0$ 的情况，如果 $f_x < 0$，曲线将绕 $O\dot{X}$ 轴旋转 180°，图 7.10 绘出了当 $c = 0$，而 f_x 为正或负值时得到的抛物曲线。图中，当 $f_x > 0$ 时，速度逐渐增大(负值减小)，而视线的距离逐渐减小(接近目标飞行器)。两飞行器相遇后停止，因此 $f_x > 0$ 的抛物线中，只有第四象限中的曲线有实用意义，并以实线绘出，还以箭头指明了运动的方向。同理，当 $f_x < 0$ 时，第二象限的曲线是有意义的，其运动方向也以箭头指明。显然，若初始状态 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 满足式(7.99) 中的 $c = 0$ 时(如图 7.10 中的 A 点或 A' 点)，则在正的 f_x(对于 A 点) 或负的 f_x(对于 A' 点) 作用下，追赶飞行器的运动参数将沿图 7.10 的实线从 A 点(或 A' 点) 逐渐移至原点，在该处与目标飞行器相遇。

假如追赶飞行器的初始条件并不满足 $c = 0$，初始状态点将不在图 7.10 的实线上，而

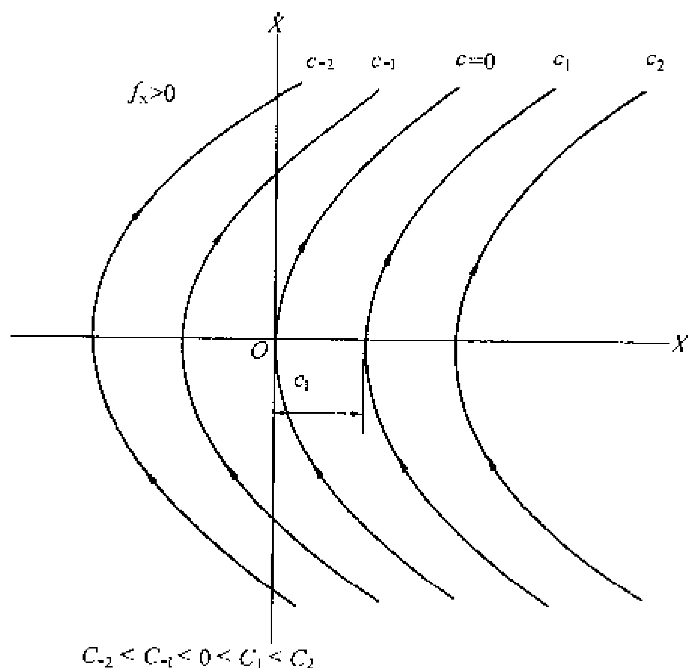


图 7.9　相轨迹曲线族

是在图 7.11 的 1、2 点或 3 点。为使追赶飞行器与目标飞行器相遇，f_x 要么取正值，要么取负值。以 2 点为例，先利用负控制力 f_x 使速度逐渐减小到零，再变为负并在 2′ 点和实抛物线相交。在 2′ 点切换为正控制力 f_x，运动状态则沿该曲线逐渐移至原点 O。对于 1 点的初始条件也有类似的情况，先施加负 f_x 至 1′ 点后切换为正 f_x 的控制过程。同理对于 3 点描述的初始状态，则可先施加正 f_x 达到 3′ 点后改变为负 f_x，最终也可达到原点。

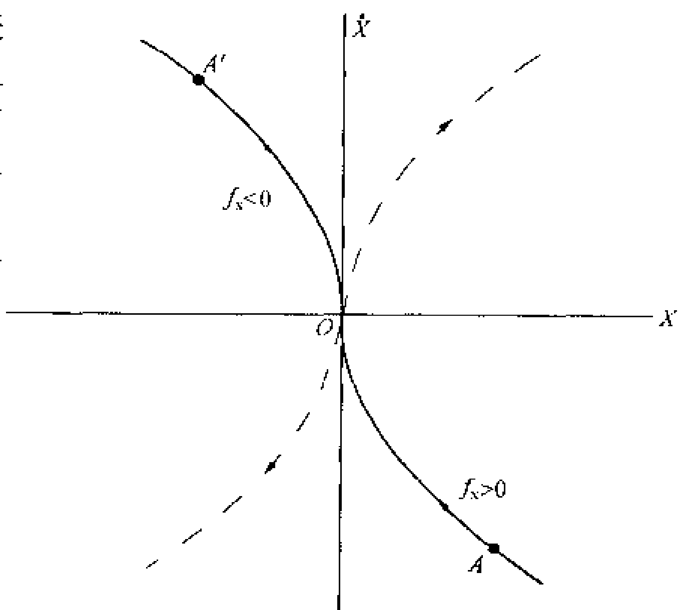


图 7.10　到达原点的相轨迹

这样，我们就以 $c=0$ 时的两条相轨迹的第二、四象限部分构成的曲线把图 7.11 所示的相平面划分为两个区域。在曲线右侧为 Ⅰ 区域，左侧是 Ⅱ 区域，若初始条件点落入 Ⅰ 区域，应先施加负的控制力(反之，在 Ⅱ 区域内则应加正 f_x)，使运动状态达到 $c=0$ 的曲线，再切换为相应的正(或负)控制力，直至达到原点 O。

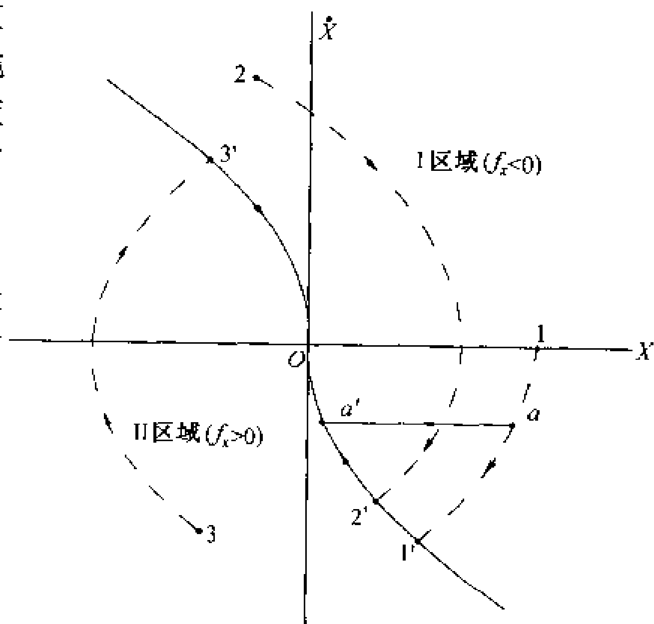


图 7.11　间接到达原点

另一种控制方法是利用 $f_x=0$ 的状态。假如初始状态在 1 点(图 7.11)，和前种控制方法一样，先施加负 f_x 使运动状态从 1 点沿虚线抛物线向 1′ 点运动，当状态达到 a 点时，使控制力突降至零。该瞬间追赶飞行的速度是 a 点对应的负值，在这一速度作用下，飞行器将等速地朝 x 减小的方向运动，其状态将沿与 OX 轴平行的直线，从 a 点运动到与实线相交的 a' 点。此时，若施加正 f_x，则运动状态将沿实线运动到原点 O。

后一种方法所消耗的能量，无疑要比第一种方法少。从节能的角度讲，当从点出 1 发之后，a 越靠近 1 点，能量越低，然而由于速度小，所需的时间就会增加，两者成反比的关系。假如适当选择 a 点的位置，将取得时间和消耗的能量均可接受的折中方案，这就是本小节所谓的最优控制的含义。

为求最优控制律，首先得建立目标函数 J。它是交会对接的总时间 T 和消耗能量的加权和

$$J = KT + \int_0^T |f_x| \mathrm{d}t \tag{7.100}$$

其中，K 为加权系数。

一般情况下，交会对接开始时初始速度 $\dot{x}(0) = 0$，而 $x(0) \neq 0$，我们即以此为前提。在这种情况下，T 应为三部分时间和：自1点至 a 点的时间(图7.11)，a 点至 a' 点的时间和 a 点到 O 点的时间。由于 f_x 为正和负值的曲线互相镜面对称，易知，从 a' 点到 O 点的等减速运动时间应和从 O 点到 a' 点反向进行的等加速运动时间相等，即

$$T_1 = \frac{\dot{x}^*}{f_x} \tag{7.101}$$

其中，$\dot{x}^*$ 是 a 点或 a' 点对应的速度。显然，根据等加速度运动原理，还可求得 O 点到 a' 点和1点到 a 点的距离，它们也是相等的，其值是

$$x_a = \frac{(\dot{x}^*)^2}{2f_x} \tag{7.102}$$

而 a 点至 a' 点的距离应是 $x(0) - 2x_a$，这段距离的运行时间是

$$T_2 = \frac{x(0) - 2x_a}{\dot{x}^*} \tag{7.103}$$

所以，总的飞行时间是 $T = 2T_1 + T_2$，把式(7.101) ~ 式(7.103)代入，有

$$T = \frac{\dot{x}^*}{f_x} + \frac{x(0)}{\dot{x}^*} \tag{7.104}$$

考虑到 $f_x = \text{const}$，和它的作用时间为1点到 a 点和 a' 点到 O 点，即在 $2T_1$ 时间间隔内，目标函数式(7.100)中的积分应为

$$2\int_0^{T_1} f_x \mathrm{d}t = 2f_x\left(\frac{\dot{x}^*}{f_x} - 0\right) = 2\dot{x}^*$$

因此，式(7.100)成为

$$J = K\left(\frac{\dot{x}^*}{f_x} + \frac{x(0)}{\dot{x}^*}\right) + 2\dot{x}^* \tag{7.105}$$

我们的任务是要选择 $\dot{x}^*$ 值，使得 J 达到极小。为此取 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\dot{x}^*}$ 并令其为零，可得

$$(\dot{x}^*)^2 = \frac{Kf_x}{K + 2f_x} x(0)$$

此外，a 点对应的横轴坐标是

$$x^* = x(0) - \frac{(\dot{x}^*)^2}{2f_x}$$

由后式解得 $x(0)$，代入前式，即求得从不同的 $x(0)$ 点出发，所得 a 点在相平面的曲线

$$x^* = \frac{K + 4f_x}{2Kf_x}(\dot{x}^*)^2$$

它是相平面右侧的抛物线，我们所需的是第四象限中的那一部分曲线。如果连 f_x 为负值时的 a 点的曲线也一同描述，则上式可写为

$$x^* = -\frac{K + 4f_x}{2Kf_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^* \tag{7.106}$$

这就是 a 点(图 7.12) 所在的曲线。在这条曲线上,原以正或负 f_x 力驱动的飞行器,就应切

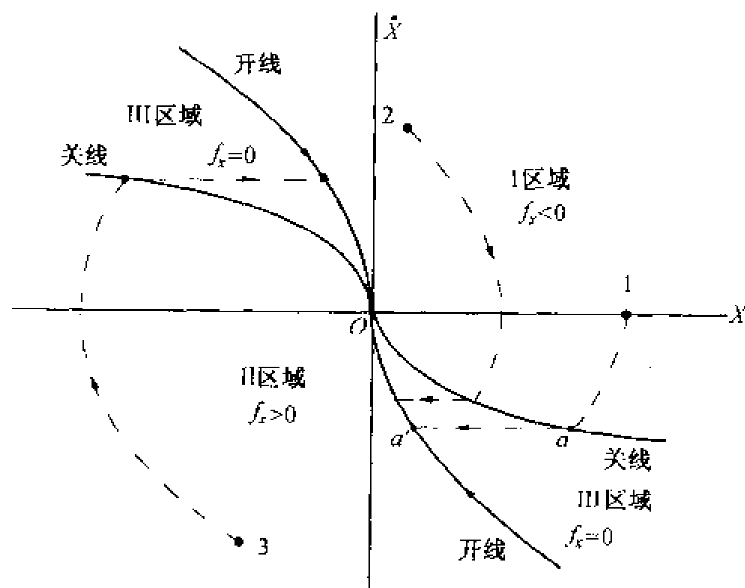


图 7.12　最优控制的开关线

换到零控制力状态,故又称为关线。相应地,当飞行器的运动状态沿 a 点运行到 a' 点(图 7.12) 时,又应切换到正或负 f_x 控制力模式,故 a' 点所在的曲线又称为开线,其方程式也可类似地写为

$$x = -\frac{1}{2f_x}|\dot{x}^*|\dot{x}^* \tag{7.107}$$

开线是以 f_x 为参数的曲线,而关曲线除了与 f_x 有关之外,还与加权系数 K 有关。

在图7.12中,开线与关线之间的区域称为 Ⅲ 区域,综上所述,在该区域中取零控制力 $f_x = 0$; Ⅲ 区域右侧为 Ⅰ 区域,在其中施加负的控制力 $-f_x$;最左侧是 Ⅱ 区域,在其间应加正的控制力 f_x。图中还示出了当初始状态在 1 点、2 点或 3 点时,把追踪飞行器导引到与目标飞行器相遇的飞行过程,上述控制程序可以写成

$$f_x = \begin{cases} f_x, \quad 当\begin{cases} x < -\dfrac{K+4f_x}{2Kf_x}|\dot{x}|\dot{x} \text{ 和 } x < 0 \\ x < -\dfrac{1}{2f_x}|\dot{x}|\dot{x} \text{ 和 } x > 0 \end{cases} \\ -f_x, 当\begin{cases} x > -\dfrac{K+4f_x}{2Kf_x}|\dot{x}|\dot{x} \text{ 和 } x > 0 \\ x > -\dfrac{1}{2f_x}|\dot{x}|\dot{x} \text{ 和 } x < 0 \end{cases} \\ 0, \quad 当 x, \dot{x} 为其余条件 \end{cases} \tag{7.108}$$

对于 y 方向,也可以同样的方式处理,所得结论和 x 方向相同,控制规律与式(7.108)类似,只要将 x 换成 y 即可。

上面所得的控制律是在简化后的方程式(7.92) 和式(7.93) 基础上获得的。以式(7.13) ~ 式(7.15) 为基础导出的最优交会对接控制方法,由于式(7.13) ~ 式(7.15) 比

式(7.92) ~ 式(7.93) 多考虑了一些次要项，其结果自然要稍好一些。[10] 然而式(7.13) ~ 式(7.15) 也略去了一些较小的项，并非完全准确的方程式，这是应该记住的。

此外，为构成一定的控制规律，必须根据要求在空间飞行器上设置测量装置。例如，为实现式(7.75) 和式(7.76) 的控制规律，应能测得(或计算求得)ρ、$\dot{\rho}$、q 和 $\dot{q}$ 等；而为实现式(7.108) 的控制规律需要测得(或计算出)x，$\dot{x}$ 等作为控制力(虽然是固定值)的切换条件。

最后，在研究各种导引律时，都是把空间飞行器视为质点，而未考虑它们的尺寸效应。真实应用这些导引律时，必须计入飞行器的尺寸和形状，并考虑轨道运动与姿态运动的耦合，防止它们在空间相碰撞，特别是当相对距离(x，y 或 ρ) 成为负值时，更应注意，最好把出现相对距离为负的情况剔除。

第八章 空间飞行器的摄动理论

前述各章有一共同的假设,即引力体被视为质量全部集中在质心的质点,然而这一假设有些时候却会造成一定的误差。此外,二体问题的简化模型中,除相互引力之外,不存在其他作用力的假设,也会造成一定的影响。上述各类影响因素,使两体运动的状态产生的相对于二体问题变化规律的偏差,称为摄动或扰动。本章就是研究它们的影响,实际上是使原来的模型更为准确的过程。摄动源主要有引力场的非理想性、稀薄大气、太阳风、其他天体的引力等,这里主要研究前两种。

8.1 地球引力场的势函数

中心引力体全部质量集中在质心的质点,在距质心 r 处的单位质量受到的万有引力为 μ/r^2,当引力体非理想时,不能简单地把质量集中于质心。为了解非理想引力体引力场的实际情况,必须建立描述引力场中引力变化情况函数 —— 势函数。

引力势能是由于引力相互作用所具有的能量,它用引力将单位质量从引力场中某点移动到参考点时所做的功来描述,表示该点势能的大小。而势函数则是以函数形式表示的势能。如图 8.1 所示的任意形状中心引力体 B 的势函数可通过下述方法得到,即它划分为无穷多个微元体,其质量是 $\mathrm{d}m$,先写出某微元体在距离为 r 的 A 点处的势函数,再将它们的作用积累起来。$\mathrm{d}m$ 微元在与其距离为 r 的 A 点处的势函数为

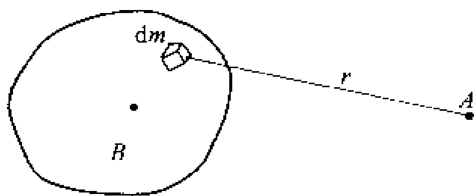


图 8.1 引力体的势函数

$$\mathrm{d}U = -\frac{\mathrm{d}m}{r}G$$

其中,G 是万有引力常数,则 B 体在 A 点处的势函数是它的积分

$$U = -\int_B \frac{\mathrm{d}m}{r}G = -\int_B \frac{G\sigma}{r}\mathrm{d}V \tag{8.1}$$

式中,B 表示积分遍及 B 体,σ 为 $\mathrm{d}m$ 处的密度,是其在 B 中位置的函数,$\mathrm{d}V$ 是 $\mathrm{d}m$ 的体积。

式(8.1)是把参考点选在无穷远而得到的(可参阅任何一本理论力学教科书),换言之我们认为距中心引力体无穷远处的势能为零,比无穷远近的位置的势能就是负的了。

8.1.1 均质球的势函数

显然 B 体的势函数与其质量分布和形状有关。我们先求均质球体的势函数,再研究它的性质,然后再与其他形状均质引力体进行比较分析。图 8.2 所示 B 为均质球体,其密度为 σ,半径是 R_B,A 点到球心 O 距离为 $R(R > R_B)$,试求该点的势函数。我们选择以 A 点为心,r 和 $r+\mathrm{d}r$ 为半径两球面与 B 体所交的薄层为微元体,该微元体的质量设为 $\mathrm{d}m$,该

壳层上各点与 A 点的距离均为 r，故微元壳体在 A 点的势函数是

$$dU = -\frac{G dm}{r} = -\frac{G\sigma}{r}dV$$

为求得 dV，再做以 A 为顶，OA 为轴的两圆锥，取半顶角为 θ 和 $\theta + d\theta$，它们和先前的球壳所交的圆环长度是 $2\pi r\sin\theta$（图 8.2），截面积是 $rd\theta dr$，所以，把它代入上式，并取对整个 B 球的积分，则均质球体的势函数是

$$U = -2\pi\sigma G\iint r\sin\theta d\theta dr$$

由图 8.2 知，积分限是：对于 θ 角为 0 至 θ_0，对于 r 为 $R - R_B$ 至 $R + R_B$，可由图 8.2 解三角形求得（余弦定理）

$$\theta_0 = \arccos\frac{R^2 + r^2 - R_B^2}{2rR}$$

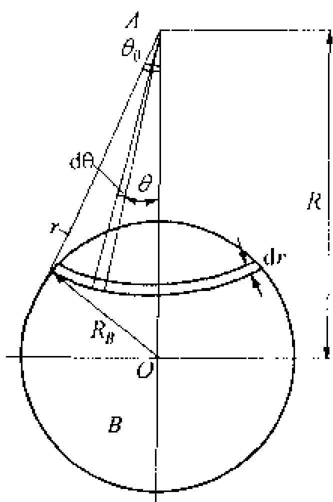


图 8.2　均质球形引力体

所以

$$U = -2\pi\sigma G\int_{R-R_B}^{R+R_B} r\int_0^{\arccos\left(\frac{R^2+r^2-R_B^2}{2rR}\right)}\sin\theta d\theta dr =$$

$$-2\pi\sigma G\int_{R-R_B}^{R+R_B} r\left(1 - \frac{R^2 + r^2 - R_B^2}{2rR}\right)dr =$$

$$-\frac{4\pi\sigma}{3}R_B^3\frac{G}{R}$$

因为 $\frac{4\pi R_B^3}{3}\sigma = M$ 是 B 球体的质量，因此 B 对 A 的势函数是

$$U = -\frac{M}{R}G = -\frac{\mu}{R} \tag{8.2}$$

这就是说，对于均质球，势函数相当把全部质量集中在其质心作用的结果，其形式恰如式(3.18)。

如对 R 取导数，则式(8.2)成为 $\frac{dU}{dR} = \frac{\mu}{R^2}$，它恰是 B 物体对 A 点单位质量的万有引力。

一般地说，作用力和势函数的关系是

$$\boldsymbol{f} = -\text{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{8.3}$$

grad 是梯度算子符号，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是以 B 体中心为原点的 $OXYZ$ 坐标系 X、Y 和 Z 方向的单位矢量（图 8.3）。

由图 8.3 有

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8.4}$$

把上式代入式(8.2)，再代入式(8.3)，得

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\mu}{R^3}x\boldsymbol{i} - \frac{\mu}{R^3}y\boldsymbol{j} - \frac{\mu}{R^3}z\boldsymbol{k} \tag{8.5}$$

显然，可以求得 f 的各分量

$$f_x = -\frac{\mu}{R^3}x$$

$$f_y = -\frac{\mu}{R^3}y \qquad (8.6)$$

$$f_z = -\frac{\mu}{R^3}z$$

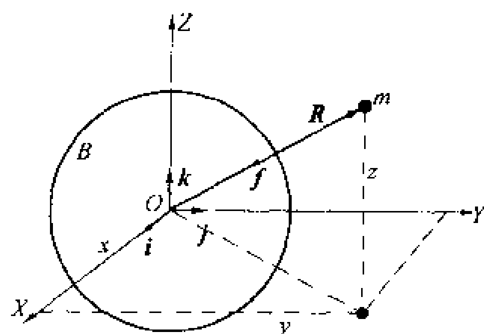


图 8.3　引力的分量

只要把上述三式代入 $f = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{1/2}$，可得 $f = \frac{\mu}{R^2}$，正好是 B 对 A 点单位质量的万有引力。

事实上，把地球视为均质球，在许多场合都能得到精度足够的结果。但实际上，真实的地球并不是球形，而是赤道半径较大，两极方向较小的接近椭球的星体，在要求精度较高的分析中，将地球视为均质椭球，可以比均质球更准确地描述地球的引力场。

8.1.2　均质椭球的势函数

假如把地球视为绕南北极轴的回转体，在过南北极轴的任意平面内都是相同的椭圆，其长轴过赤道，短轴与南北极轴重合，长短半轴分别是 a 和 b（图 8.4）。取坐标系 $OXYZ$，OZ 与地轴重合，OX 自地心指向过格林尼治天文台的子午线，OY 与前两者构成正交坐标系（右旋）。在地球内取一微元体质量，距地心为 ρ，经度和纬度分别是 λ 和φ，若取微元体的边长为 $\rho\mathrm{d}\varphi$，$\rho\cos\varphi\mathrm{d}\lambda$ 和 $\mathrm{d}\rho$（$\mathrm{d}\rho$ 在图中未示出），则有 $\mathrm{d}m = \sigma\rho^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho$，其中 σ 是地球的密度，$\mathrm{d}m$ 质点对相距为 r、坐标值为 x、y、z 的 A 点的势函数是 $\partial U = -G\frac{\mathrm{d}m}{r}$，整个地球的势函数是

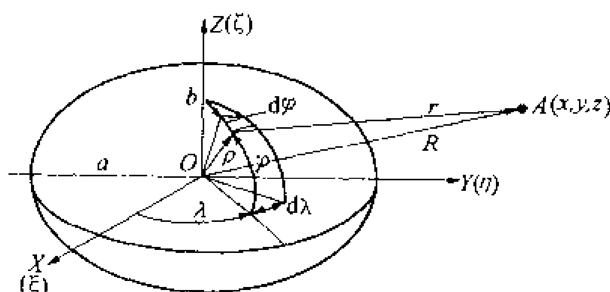


图 8.4　均质椭球形引力体

$$U = -\int_B G\frac{\mathrm{d}m}{r} = -\sigma G\int_B \frac{\rho^2}{r}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho \qquad (8.7)$$

积分应遍及整个地球 B。

积分之前先化简分式$\frac{1}{r}$，如果把 ρ 分解在 $OXYZ$ 轴系内，为避免与 A 点的坐标值混淆，以 ξ、η 和 ζ 分别表示 ρ 在 X、Y、Z 方向的分量，则因 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{\rho}$（$\boldsymbol{R}$ 是地心至 A 点矢径），有

$$\frac{1}{r} = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[R^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{R}\left[1 + \frac{\rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

应用

$$(1+\alpha)^{-n}=1-n\alpha+\frac{n(n+1)}{2!}\alpha^2-0(\alpha^3)\quad(\alpha<1,n>0)$$

可将上式改写为

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{\rho^2-2(x\xi+y\eta+z\zeta)}{2R^2}+\frac{3}{8}\frac{\rho^4-4\rho^2(x\xi+y\eta+z\zeta)+4(x\xi+y\eta+z\zeta)^2}{R^4}\right] \tag{8.8}$$

把式(8.8)代回式(8.7)第一个等式，略去$\frac{\rho}{R}$、$\frac{\xi}{R}$、$\frac{\eta}{R}$、$\frac{\zeta}{R}$三次以上的项，并考虑到 O 点为椭球质心，OX、OY、OZ 轴为其对称轴，因而有

$$\int_B\xi\mathrm{d}m=\int_B\eta\mathrm{d}m=\int_B\zeta\mathrm{d}m=0,\int_B\xi\eta\mathrm{d}m=\int_B\eta\zeta\mathrm{d}m=\int_B\zeta\xi\mathrm{d}m=0$$

则势函数成为

$$U=-\frac{G}{R}\int_B\left[1-\frac{\rho^2}{2R^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2}{R^4}\right]\mathrm{d}m=$$

$$-\frac{G}{R}M+\frac{G}{2R^2}\int_B\rho^2\mathrm{d}m-\frac{3}{2}\frac{G}{R^5}\left[x^2\int_B\xi^2\mathrm{d}m+y^2\int_B\eta^2\mathrm{d}m+z^2\int_B\zeta^2\mathrm{d}m\right]$$

M 为地球总质量。再把 $\mathrm{d}m=\sigma\rho^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho$ 代入，考虑到

$$\xi=\rho\cos\varphi\cos\lambda \tag{8.9}$$

$$\eta=\rho\cos\varphi\sin\lambda \tag{8.10}$$

$$\zeta=\rho\sin\varphi \tag{8.11}$$

势函数成为

$$U=-\frac{G}{R}M+\frac{G}{2R^2}\int_B\sigma\rho^4\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho-\frac{3G\sigma}{2R^5}\left[x^2\int_B\rho^4\cos^3\varphi\cos^2\lambda\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho+\right.$$

$$\left.y^2\int_B\rho^4\cos^3\varphi\sin^2\lambda\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho+z^2\int_B\rho^4\cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\rho\right] \tag{8.12}$$

积分时 λ 的积分限为 0 至 2π，φ 为 $-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$，而 ρ 由 0 积至 ρ_s。ρ_s 的求法如下：地球表面在子午面中是一椭圆，方程式为

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}+\frac{\zeta^2}{b^2}=1$$

把式(8.9)、式(8.10)和式(8.11)代入上式，令 $\rho=\rho_s$，并考虑到 $a^2=b^2+e^2a^2$，有

$$\rho_s=\frac{b}{(1-e^2\cos\varphi)^{1/2}} \tag{8.13}$$

积分后，求得

$$U=-\frac{GM}{R}-\frac{2G\pi b^5}{15R^5}(x^2+y^2-2z^2)e^2\sigma$$

因对于椭球有

$$M=\frac{4\pi a^2b}{3}\sigma$$

和 $$x^2 + y^2 - 2z^2 = R^2 - 3z^2 = R^2(1 - 3\sin^2\varphi)$$

所以,考虑到 $CM = \mu$ 后,势函数是

$$U = -\frac{\mu}{R}\left[1 + \frac{b^2e^2}{10a^2}(1 - 3\sin^2\varphi)\left(\frac{b}{R}\right)^2\right]$$

如令

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

则 $$\frac{b^2}{a^2}e^2 = (1-\alpha)^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} = (1-\alpha)^2\frac{a+b}{a}\frac{a-b}{a} = (1-\alpha)^2\alpha(2-\alpha) =$$

$$(1 - 2\alpha + \alpha^2)\alpha(2-\alpha) = 2\alpha + 0(\alpha^2)$$

略去 α^2 以上的各项,于是地球作为均质椭球,其势函数是

$$U = -\frac{\mu}{R}\left[1 + \frac{\alpha}{5}\left(\frac{b}{R}\right)^2(1 - 3\sin^2\varphi)\right] \tag{8.14}$$

式中,α 是地球椭球率,其值为 1/298.25。

事实上,把地球视为椭球仍非精确的模型,人们通过实测和通过对人造地球卫星轨道的反算,求得的更精确的地球势函数是

$$\begin{aligned} U = -\frac{\mu}{R}\Bigg[1 &+ \frac{J_2}{2}\left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^2(3\sin^2\varphi - 1) + \\ &\frac{J_3}{2}\left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^3(5\sin^2\varphi - 3)\sin\varphi + \\ &\frac{J_4}{2}\left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^5(3 - 30\sin^2\varphi + 35\sin^4\varphi) + \cdots\Bigg] \end{aligned} \tag{8.15}$$

其中,$R_\oplus$ 是地球赤道半径,而

$$J_2 = -1.082\,64\times10^{-3}, J_3 = 2.55\times10^{-6}, J_4 = 1.65\times10^{-6}, \cdots$$

当不考虑 J_2、J_3,… 等的作用时,得到均质球状地球的理想势函数。若仅考虑至 J_2 时,得到和式(8.14)一致的均质椭球势函数,称为一阶摄动势函数,依此类推。J_2、J_3、J_4、…,只与纬度角 φ 有关的系数被称为带谐系数,在对应项中,$\sin\varphi$ 以偶次方出现的(如在 J_2, J_4,… 项中),又称为偶带谐或偶带系数,$\sin\varphi$ 以奇次方出现的(如在 J_3, J_5,… 项中),则称奇带谐或奇带系数。

下面分析各带谐系数项的影响,先考虑 J_2,显然有:当 $\varphi = \pm35°15'52''$ 时,$3\sin^2\varphi - 1 = 0$,考虑到 $J_2 < 0$,则按式(8.15)前两项绘出的均质地球形状(虚线)应如图 8.5(a) 所示。

若取第一和三项,则当 $\varphi = 0°$ 和 $\varphi = \pm50°46'7''$ 时,$(5\sin^2\varphi - 3)\sin\varphi = 0$,对应的均质地球形状如图 8.5(b) 所示。如果取式(8.15)中第一和四项,则当 $\varphi = \pm19°52'33''$ 和 $\pm59°26'40''$ 时,$3 - 30\sin^2\varphi + 35\sin^4\varphi = 0$,则由于 J_4 的影响,均质地球的形状应如图 8.5(c) 所示。按照上述的结果,地球就好像被平行于赤道划分为若干条,某些条较理论球体突起,某些条又低于理论球体,这就是带谐系数一词的由来。如果更精确地描述地球的模型,还会出现沿子午面划分的高低变化的带,描述这些影响项的系数只与经度 λ 有关,称为田谐系数,这里就不对此加以研究了。

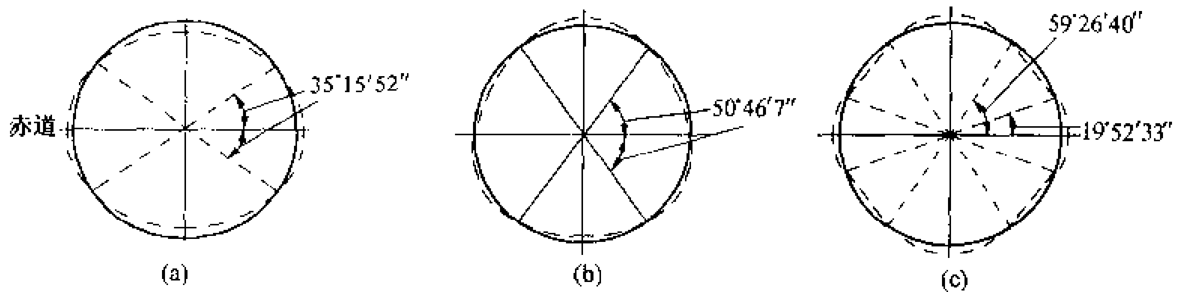


图 8.5　各阶带谐系数的影响

把上述影响全部叠加起来，地球最终的均质模型形状有些近似于梨形，它在椭率为 1/298.25 的回转椭球体的基础上，北极约凸出 10 m，南极则凹入了 30 m（见图 8.6），而地球赤道和两极的半径通常可取为（回转椭球体）

$$R_{\oplus} = 6\ 378.144\ \text{km}$$

$$R_{极} = 6\ 356.759\ \text{km}$$

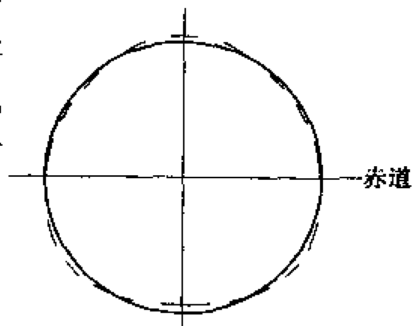


图 8.6　全部影响总和

8.2　干扰力分量引起的摄动

作用在空间飞行器上的干扰力有：地球引力场对于中心引力场（或均质球体引力场）的偏差（引力场的非理想性）；太阳和月亮的引力；低轨道的地球气动阻力；太阳辐射压力。

计入上述干扰力后，飞行器运动方程式(3.8) 成为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f} \tag{8.16}$$

其中，$\boldsymbol{f}$ 是作用在飞行器单位质量上的干扰力，即摄动加速度，这个方程的解法有二：(1) 数值积分；(2) 轨道元素变动法。

8.2.1　以时间为变量的参数（或轨道元素）变动法

在干扰力的作用下，卫星轨道参数是变化的，若卫星运动到某 S 点，把该点的轨道参数固定，所形成的二体运动轨道将与真实轨道相切，被称为密切轨道，如图 8.7 所示，相邻不太远的密切轨道组成的平均轨道可以代替真实轨道。

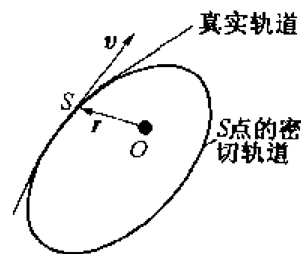


图 8.7　密切轨道

在干扰力的作用下，轨道参数产生的变化（摄动），分为两类：周期性摄动，即卫星运动一整周后恢复为零的轨道参数的变动；长期摄动，即轨道参数的持续变化。

为分析干扰力对轨道面运动的影响，引入轨道面坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 和运动坐标系 $\alpha\xi\eta\zeta$（图 8.8）。O 是地心，OX_1 在赤道平面指向升交点，OZ_1 垂直轨道平面，OY_1 与 OX_1 和

OZ_1 构成右旋正交坐标系。a 是飞行器质心，$a\zeta$ 与 oa 连线（轨道半径）重合，$a\xi$ 在轨道平面上与半径垂直指向前方，$a\eta$ 是轨道平面的法线。设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为 X_1，Y_1 和 Z_1 方向的单位矢量；$\boldsymbol{\theta}_0$，$\boldsymbol{n}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 是 ξ，η 和 ζ 方向的单位矢量，$\boldsymbol{l}_0$ 为地轴方向的单位矢量。

图 8.8　三个坐标系

我们考虑的干扰力在运动坐标系中的分量 f_r、f_θ、f_n（参考图 8.8）是

$$\boldsymbol{f} = f_r \boldsymbol{r}_0 + f_\theta \boldsymbol{\theta}_0 + f_n \boldsymbol{n}_0 \tag{8.17}$$

下面分析干扰力对各轨道参数（a，e，i，p，Ω，ω）的影响。

a. 半长轴 a 的变动

由能量方程式

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

求得

$$v^2 = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

当卫星运动受扰动时，轨道参数（a，e，i，p，Ω，w）等都是变化的，所以上式对时间求导，有

$$2\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = \mu\left(-\frac{2\dot{r}}{r^2} + \frac{\dot{a}}{a^2}\right)$$

由此，求出

$$\dot{a} = 2a^2\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}}{\mu} + \frac{\dot{r}}{r^2}\right)$$

因

$$\dot{r} = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

代入上式后，得

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$$

把式(8.16)代入后，得

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{f} \tag{8.18}$$

由于

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{r}_0 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0$$

所以用上式和式(8.17)，可求得

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{f} = \dot{r} f_r + r\dot{\theta} f_\theta \tag{8.19}$$

由轨道方程式

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta$$

在密切轨道上对其求时间导数(轨道参数为常数),有

$$-\frac{p \cdot \dot{r}}{r^2} = -e\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

或

$$\dot{r} = \frac{e}{p} r^2 \dot{\theta} \sin\theta$$

前已给出 $h = r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p}$,所以有

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e\sin\theta \tag{8.20}$$

和

$$r\dot{\theta} = \frac{1}{r}\sqrt{\mu p} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\theta)$$

把 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 代回式(8.19)再代入式(8.18),则有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}}[e\sin\theta \cdot f_r + (1 + e\cos\theta) \cdot f_\theta] \tag{8.21}$$

b. 半正焦弦 p、轨道倾角 i、升交点经度 Ω 的变动

轨道角动量矩(参见图 8.8)是

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\mu p}\boldsymbol{n}_0 \tag{8.22}$$

由于干扰力的作用,半正焦弦和轨道平面法线不是常数,因而对上式求导有

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\dot{p}\,\boldsymbol{n}_0 + \sqrt{\mu p}\dot{\boldsymbol{n}}_0 = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{n}}_0 + \frac{\dot{p}}{2p}\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu p}}\boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{f} - \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{n}}_0 + \frac{\dot{p}}{2p}\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu p}}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) \tag{8.23}$$

用轨道参数和其导数表示 $\dot{\boldsymbol{n}}_0$ 和 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$:

$\boldsymbol{n}_0$ 决定了轨道平面的取向,而轨道平面在干扰力作用下是会改变方向的,即有绕节线 $K - K'$(见图 8.8)的旋转$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;绕 $\boldsymbol{l}_0$ 的旋转 Ω,所以轨道平面的旋转角速度(因而还有其单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$)是

$$\boldsymbol{w} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \dot{\Omega}\boldsymbol{l}_0$$

单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 的导数是

$$\dot{\boldsymbol{n}}_0 = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{n}_0$$

将 $\boldsymbol{w}$ 代入上式,有

$$\dot{\boldsymbol{n}}_0 = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}_0) + \dot{\Omega}(\boldsymbol{l}_0 \times \boldsymbol{n}_0)$$

由图 8.8,有

$$\boldsymbol{l}_0 \times \boldsymbol{n}_0 = \sin i \cdot \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}_0 = -\boldsymbol{j}$$

因此,最后得

$$\dot{\boldsymbol{n}}_0 = -\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \dot{\Omega}\sin i\, \boldsymbol{i} \tag{8.24}$$

把 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$ 写为

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_n + \underbrace{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_\theta}_{rf_\theta \boldsymbol{n}_0} + \underbrace{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_r}_{0}$$

而在 $OX_1Y_1Z_1$ 坐标系中

$$\boldsymbol{r} = r\cos(\omega + \theta)\boldsymbol{i} + r\sin(\omega + \theta)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{f}_n = f_n \boldsymbol{n}_0$$

所以

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_n = -rf_n\cos(\omega + \theta)\boldsymbol{j} + rf_n\sin(\omega + \theta)\boldsymbol{i}$$

将上式代回表达式中,得

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = -fr_n\cos(\omega + \theta)\boldsymbol{j} + rf_n\sin(\omega + \theta)\boldsymbol{i} + rf_\theta \boldsymbol{n}_0 \tag{8.25}$$

把式(8.24)和式(8.25)代入式(8.23),有

$$-\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \dot{\Omega}\sin i\boldsymbol{i} + \frac{\dot{p}}{2p}\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu p}}[-rf_n\cos(\omega + \theta)\boldsymbol{j} + rf_n\sin(\omega + \theta)\boldsymbol{i} + rf_\theta \boldsymbol{n}_0] \tag{8.26}$$

上式两端的各分量应保持相等,所以

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}}rf_n\cos(\omega + \theta) \tag{8.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}}rf_n\frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \tag{8.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}rf_\theta \tag{8.29}$$

由以上三式看出:$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ 只与 f_n 有关,这是因为只有垂直于平面的力才能使平面旋转。当 $\omega + \theta = 0$ 时,f_n 对 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$ 影响最大,而 $\omega + \theta = \frac{\pi}{2}$ 时,对 $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ 影响最大。

c. 偏心率 e 的变动

由前面给出过的方程式 $p = a(1 - e^2)$ 的导数求出

$$\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e}$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{a}(1-e^2)}{2ae}-\frac{\dot{p}}{2ae}=\frac{\dot{a}p}{2a^2e}-\frac{\dot{p}}{2ae}$$

把 $\dot{p}$ 和 $\dot{a}$ 的方程式(8.29) 和式(8.21) 代入上式,有

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}[e\sin\theta\cdot f_r+(1+e\cos\theta)f_\theta]-\frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\mu}}rf_\theta=$$
$$\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\sin\theta\cdot f_r+\left(\frac{1}{e}+\cos\theta-\frac{r}{ae}\right)f_\theta\right]$$

其中

$$\frac{1}{e}+\cos\theta-\frac{r}{ae}=\frac{1}{e}\left(1-\frac{r}{a}\right)+\cos\theta=\frac{1}{e}\left(1-\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right)+\cos\theta=$$
$$\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}+\cos\theta=\frac{r}{p}(e+\cos\theta)+\cos\theta$$

把它代回原式,有

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\sin\theta\cdot f_r+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\theta+\frac{re}{p}\right]f_\theta\right\}\tag{8.30}$$

d. 联拱线的旋转与 ω 的变动

卫星在轨道上,由于受干扰的影响,其轨道角速度是(参考图 8.8)

$$(\dot{\omega}+\dot{\theta})\boldsymbol{n}_0+\dot{\Omega}\cos i\boldsymbol{n}_0$$

所以被扰动轨道的动量矩是

$$\boldsymbol{h}=\sqrt{\mu p}\boldsymbol{n}_0=r^2(\dot{\omega}+\dot{\theta}+\dot{\Omega}\cos i)\boldsymbol{n}_0$$

因而

$$\dot{\omega}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}-\dot{\theta}-\dot{\Omega}\cos i\tag{8.31}$$

应该说明的是,对于无扰动的轨道应有 $\dot{\omega}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}-\dot{\theta}=0$。式中 $\dot{\theta}$ 由轨道方程式 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ 决定,有

$$\cos\theta=\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-1\right)$$

求导后

$$-\sin\theta\cdot\dot{\theta}=\frac{1}{e}\left(\frac{r\dot{p}-\dot{r}p}{r^2}\right)-\frac{\dot{e}}{e^2}\left(\frac{p}{r}-1\right)\tag{8.32}$$

上式中的 $\dot{r}$,可以近似应用无扰轨道的式(8.20) 来代替,同时将 $\dot{p}$ 和 $\dot{e}$ 的方程式(8.29) 和式(8.30) 代入得

$$-\dot{\theta}=\frac{1}{e\sin\theta}\frac{2r^2\sqrt{\frac{p}{\mu}}f_\theta-\sqrt{\mu p}e\sin\theta}{r^2}-$$
$$\frac{1}{e^2\sin\theta}\left(\frac{p}{r}-1\right)\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\sin\theta\cdot f_r+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\theta+\frac{re}{p}\right]f_\theta\right\}$$

移项有

$$\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\theta} = \frac{2\sqrt{\dfrac{p}{\mu}}}{e\sin\theta} f_\theta - \frac{1}{e^2\sin\theta}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\sin\theta \cdot f_r + \left[(1 + \frac{r}{p})\cos\theta + \frac{re}{p}\right] f_\theta\right\}$$

把上式代入式(8.31)，$\dot{\Omega}$ 的式(8.28) 也代入式(8.31)，有

$$\dot{\omega} = \frac{2\sqrt{\dfrac{p}{\mu}}}{e\sin\theta} f_\theta - \frac{1}{e^2\sin\theta}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\sin\theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\theta + \frac{re}{p}\right] f_\theta\right\} - \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i}\cos i \cdot f_n$$

经过整理，得

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-\frac{\cos\theta}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin\theta}{e} f_\theta - \frac{r}{p}\sin(\omega + \theta)\cot i \cdot f_n\right] \tag{8.33}$$

e. 讨论

$\dot{a}$，$\dot{e}$ 描述轨道尺寸和形状的变化(在轨道平面中的)，与 f_n 无关；

$\dot{p}$ 只与 f_θ 有关，这是因为 f_r 和 f_n 均不改变动量矩 h，而 $h = \sqrt{\mu p}$；

$\dot{\Omega}$，$\dfrac{di}{dt}$ 描述轨道平面在空间的取向，它只与 f_n 有关；

$\dot{\omega}$ 表面看与三个分量都有关，但 f_n 项是 $\dot{\Omega}$ 的函数，或者说该项是补偿 $\dot{\Omega}$ 的，所以，几乎与 f_n 无关。

8.2.2 以 $u = \omega + \theta$ 为变量的参数变动法

往往取 $u = \omega + \theta$ 为自变量更为方便，特别当沿轨道运动一周时，做积分运算尤为简便。因

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{du}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\theta}{dt} = \dot{\omega} + \dot{\theta}$$

由式(8.31)

$$\dot{\omega} + \dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega}\cos i$$

所以

$$\frac{d}{du} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega}\cos i}\frac{d}{dt}$$

用式(8.28) 代替上式的 $\dot{\Omega}$，有

$$\frac{d}{du} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\phi\frac{d}{dt} \tag{8.34}$$

其中

$$\phi = \left(1 - \frac{r^3}{\mu p}\sin u\cot i \cdot f_n\right)^{-1}$$

利用式(8.34)变换式(8.21)、式(8.27)～式(8.30)和式(8.33)，其结果见本章8.2.4中的b。

8.2.3　干扰力 f_τ、f_σ 分量引起的摄动

f_τ 和 f_σ 是轨道切向和法向分力，β 是当地水平线和速度方向的夹角。由图8.9可求得

$$\begin{aligned} f_\theta &= f_\tau\cos\beta - f_\sigma\sin\beta \\ f_r &= f_\tau\sin\beta + f_\sigma\cos\beta \end{aligned} \tag{8.35}$$

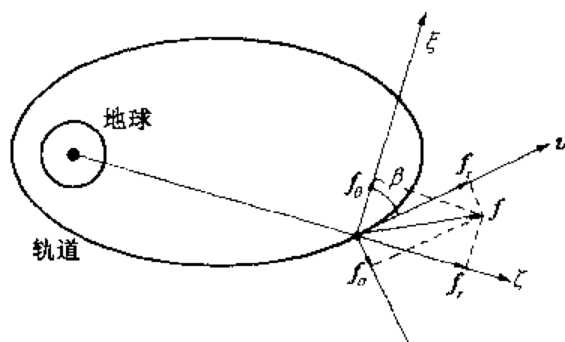


图8.9　坐标系间的关系

还可求得

$$\cos\beta = \frac{r\dot{\theta}}{v} = \frac{1}{rv}r^2\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{rv}$$

$$\sin\beta = \frac{\dot{r}}{v}$$

把式(8.20)代入最后式，得

$$\sin\beta = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\theta$$

把 $\cos\beta$ 和 $\sin\beta$ 的关系代回式(8.35)，有

$$\begin{aligned} f_\theta &= \frac{\sqrt{\mu p}}{vr}\cdot f_\tau - \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\theta\cdot f_\sigma \\ f_r &= \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\theta\cdot f_\tau + \frac{\sqrt{\mu p}}{vr}\cdot f_\sigma \end{aligned} \tag{8.36}$$

将式(8.36)代入式(8.21)、式(8.29)、式(8.30)和式(8.33)，经过整理所得结果列于下面的公式汇总中，式(8.27)和式(8.28)虽未包含 f_θ 及 f_r，也将其一并列出。

8.2.4　摄动方程式的汇总

a. 干扰力分量 f_r、f_θ 和 f_n 引起的轨道参数变动随时间变化的关系

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}}[e\sin\theta\cdot f_r + (1+e\cos\theta)\cdot f_\theta] \tag{8.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\cos(\omega+\theta)\cdot f_n \tag{8.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin(\omega+\theta)}{\sin i}\cdot f_n \tag{8.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}rf_\theta \tag{8.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\sin\theta\cdot f_r + \left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\theta + \frac{re}{p}\right]f_\theta\right\} \tag{8.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-\frac{\cos\theta}{e}f_r + \left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\theta}{e}f_\theta - \frac{r}{p}\sin(\omega+\theta)\cot i\cdot f_n\right] \tag{8.33}$$

b. 干扰力分量 f_r、f_θ 和 f_n 引起的轨道参数变动随 $u=\omega+\theta$ 的变化关系

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u} = \frac{2r^2a^2\phi}{\mu p}[e\sin(u-\omega)\cdot f_r + (1+e\cos(u-\omega))\cdot f_\theta] \tag{8.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}=\frac{r^3\phi}{\mu p}\cos u\cdot f_n \tag{8.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}u}=\frac{r^3\phi}{\mu p}\frac{\sin u}{\sin i}\cdot f_n \tag{8.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=\frac{2r^3\phi}{\mu}f_\theta \tag{8.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}u}=\frac{r^2\phi}{\mu}\left\{\sin(u-\omega)\cdot f_r+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(u-\omega)+\frac{re}{p}\right]f_\theta\right\} \tag{8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u}=\frac{r^2\phi}{\mu}\left[-\frac{\cos(u-\omega)}{e}f_r+\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin(u-\omega)}{e}f_\theta-\frac{r}{p}\sin u\cdot\cot i\cdot f_n\right] \tag{8.42}$$

其中

$$\phi=\left[1-\frac{r^3}{\mu p}\sin u\cdot\cot i\cdot f_n\right]^{-1} \tag{8.43}$$

c. **干扰力分量 f_τ、f_σ 和 f_n 引起的轨道参数的变动随时间的关系**

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2a^2v}{\mu}f_\tau \tag{8.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{2p}{v}f_\tau-\frac{2re}{v}\sin\theta\cdot f_\sigma \tag{8.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{v}\left[2(e+\cos\theta)f_\tau+\frac{r}{a}\sin\theta\cdot f_\sigma\right] \tag{8.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{ve}\sin\theta\cdot f_\tau-\frac{a(1+e^2)-r}{ave^2}\cdot f_\sigma-\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\sin(\omega+\theta)\cot i\cdot f_n \tag{8.47}$$

$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$(同式(8.27))

$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$(同式(8.28))

8.3 地球卫星的摄动

空间飞行器受到各种摄动因素造成的干扰力,使它的轨道偏离两体问题得到的理论结果,其影响积累起来,常常是不可忽视的。有时我们还要利用这些摄动影响,设计出实用的空间飞行器轨道,本节下面的内容是研究对地球卫星最重要的摄动,使用的工具是 8.2 节导出的公式,分析的内容是从事航天技术专业人员应知应会的。

8.3.1 地球扁率引起的摄动

令地心到飞行器的距离为 r,并从式(8.15)中取一阶近似的地球引力场模型,有

$$U(r,\varphi)=-\frac{\mu}{r}\left[1+J_2\frac{1}{2}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2(3\sin^2\varphi-1)\right] \tag{8.48}$$

$$J_2=-1.08264\times10^{-3}$$

其中,第一项是地球作为均质球时的引力势函数,第二项是地球扁率的影响项,以

$$U_p = -J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{2r^3}(3\sin^2\varphi - 1)$$

表示。把第四章中求得的(见式(4.14a))

$$\sin\varphi = \sin i \sin(\omega + \theta) = \sin i \sin u$$

代入后,有

$$U_p = -J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{2r^3}(3\sin^2 i \sin^2 u - 1) \tag{8.49}$$

则干扰力在运动坐标系中的各分量是

$$f_r = -\frac{\partial U_p}{\partial r} = -\frac{3}{2}J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4}(3\sin^2 i \sin^2 u - 1) \tag{8.50}$$

$$f_\theta = -\frac{\partial U_p}{r\partial\theta} = \frac{3}{2}J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4}\sin^2 i \sin 2u \tag{8.51}$$

$$f_n = -\frac{\partial U_p}{\partial\eta} = -\frac{\partial U_p}{r\sin u\,\partial i} = \frac{3}{2}J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4}\sin 2i \sin u \tag{8.52}$$

a. 地球同步轨道(GSO)卫星的准确轨道(考虑地球扁率影响时)

在赤道平面内 $i = 0$,地球的引力是均质球引力加上式(8.50)的 f_r,即

$$G = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r^2}\right)$$

应有,重力 = 离心力,所以若以 ω_{sid} 表示地球自转角速度(*),我们得到

$$\left|\frac{\mu}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r^2}\right)\right| = \omega_{sid}^2 r$$

经计算,同步轨道的半径为

$$r_{GSO} = 42\,164.78 \text{ km}$$

若不考虑地球扁率,则 $r_{GSO} = 42\,164.26$ km

b. 地球扁率造成的 Ω 变动

若把 f_n 的式(8.52)代入式(8.39),求得

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3\phi}{\mu p}\frac{\sin u}{\sin i}\frac{3}{2}J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4}\sin 2i \sin u = 3J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{rp}\phi \sin^2 u \cos i$$

其中

$$\phi = \left[1 - \frac{r^3}{\mu p}\sin u \cot i \frac{3}{2}J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4}\sin 2i \sin u\right]^{-1} = \left[1 - \frac{3}{2}J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{rp}\sin^2 u \cdot 2\cos^2 i\right]^{-1} \approx 1$$

(*)一恒星日(23 h 56 m 4 s)转一周——相对恒星坐标系的角速度

用 $r = p/(1+e\cos\theta)$ 消去$\dfrac{d\Omega}{du}$中的r,有

$$\frac{d\Omega}{du} = 3J_2\left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2\sin^2 u\cos i[1 + e\cos(u-\omega)] \tag{8.53}$$

可见,$\dfrac{d\Omega}{du}$中包含了长期及周期性摄动,其长期摄动对于卫星的一周运动为

$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = 3J_2\left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2\cos i\int_0^{2\pi}\sin^2 u[1 + e\cos(u-\omega)]du$$

这里,我们认为在一周的运动中,p、i、e、ω 为常值。由于有

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 u du = -\frac{1}{4}\sin 2u\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}u\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$e\int_0^{2\pi}\sin^2 u\cos(u-\omega)du = \frac{e}{3}\sin^3 u\Big|_0^{2\pi}\cos\omega + \left(\frac{e}{3}\cos^3 u\Big|_0^{2\pi} - e\cos u\Big|_0^{2\pi}\right)\sin\omega = 0$$

所以

$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = 3\pi J_2\left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2\cos i = 3\pi J_2\frac{(R_\oplus/a)^2}{(1-e^2)^2}\cos i$$

把 J_2 的数值代入,并以度表示,有

$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = -0.584\,6\frac{(R_\oplus/a)^2}{(1-e^2)^2}\cos i \tag{8.54}$$

变换为每天的 Ω 角变动量$(\Delta\Omega)_{day}$。卫星在一天中旋转的周数是

$$n = \frac{24\times 3\,600}{2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}}} = \frac{8.64\times 10^4}{2\pi\sqrt{\dfrac{R_\oplus^3}{\mu}}}\sqrt{\frac{R_\oplus^3}{a^3}}$$

所以

$$(\Delta\Omega)_{day} = -\frac{8.64\times 10^4}{2\pi\sqrt{\dfrac{R_\oplus^3}{\mu}}}\sqrt{\frac{R_\oplus^3}{a^3}}\times 0.584\frac{(R_\oplus/a)^2}{(1-e^2)^2}\cos i$$

或

$$(\Delta\Omega)_{day} = -9.964^\circ\frac{(R_\oplus/a)^{7/2}}{(1-e^2)^2}\cos i \tag{8.55}$$

由式(8.55)可见,当 $i < 90°$ 时节线是向西运动的,而 $i > 90°$ 时,节线向东运动,称节线的这种向西或向东的运动为轨道平面的进动。这一进动的比拟如图 8.10 所示,它是由 f_n 作用形成的,在一周的运动过程中,f_n 相当于对节线作用一力矩。

【例 1】　太阳同步轨道卫星轨道平面的进动。

太阳的视运动就是从地球上看太阳相对地球的运动,也是阳光与赤道平面和黄道平面交线的相对运动,由于黄赤道平面交线一直指向春分点,方向不变,其角速度(见图 8.11(a))是每年旋转一周

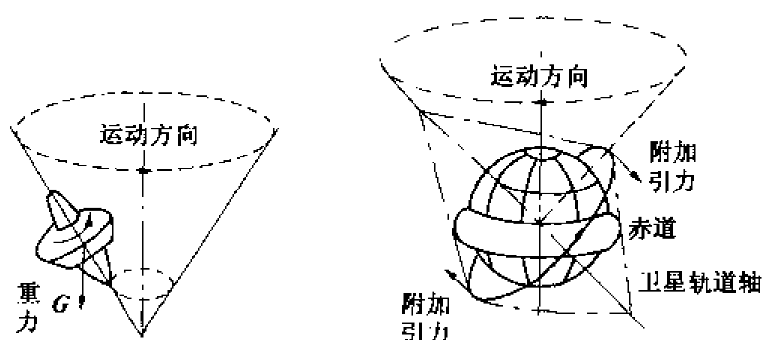


图 8.10　地球扁度引起的空间飞行器轨道进动说明

$$\frac{360°}{365.25\ \mathrm{d}} = 0.985\ 6°/\mathrm{d}(\text{向东})$$

因此，卫星的轨道若与太阳同步（相对于太阳的角度不变），轨道平面也必须有同样的东向运动才行（图 8.11(b)），即升降交点经度（节线）每天向东转过 0.985 6°，所以有

$$(\Delta\Omega)_{\mathrm{day}} = -9.964° \frac{(R_{\oplus}/a)^{7/2}}{(1-e^2)^2}\cos i = 0.985\ 6°$$

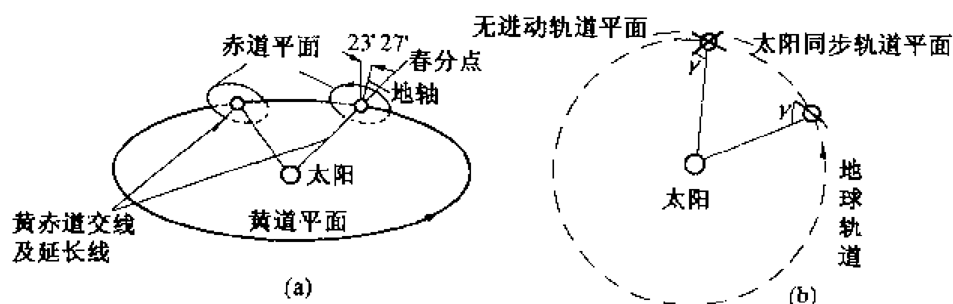


图 8.11　太阳同步轨道

或

$$i = \arccos\left[-0.098\ 96\left(\frac{a}{R_{\oplus}}\right)^{7/2}(1-e^2)^2\right]$$

此时 Ω 应取升交点黄经。对于圆轨道，轨道半径 r 与其半长轴 a 相等，轨道平面的倾角 i 和轨道高度 $h = a - R_{\oplus}$ 之间的关系如图 8.12。由图 8.12 可见，对于圆轨道，只当轨道倾角 i 大于 90° 时（逆行轨道），才可能成为太阳同步的，且随着半径（或高度）的增加不断增大。

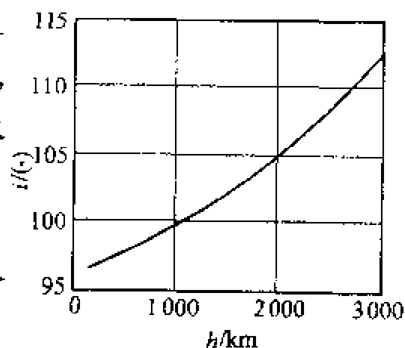


图 8.12　i 与 h 的关系曲线

c. 地球扁率造成的 ω 变动

如果把式(8.50) ~ 式(8.52) 中的 f_r、f_θ 和 f_n 代人式(8.42)，再对 u 积分，积分限取为 0 至 2π，经过推导，得

$$(\Delta\omega)_{2\pi} = -\frac{3}{2}\pi J_2 \frac{(R_{\oplus}/a)^2}{(1-e^2)^2}(5\cos^2 i - 1)$$

或

$$(\Delta\omega)_{2\pi} = 0.2923^\circ \frac{(R_\oplus/a)^2}{(1-e^2)^2}(5\cos^2 i - 1) \tag{8.56}$$

用和 $\Delta\Omega$ 相仿的变换方法，我们还可求得的每天的变动

$$(\Delta\omega)_{\text{day}} = 5.00^\circ \frac{(R_\oplus/a)^{7/2}}{(1-e^2)^2}(5\cos^2 i - 1) \tag{8.57}$$

由此可见，对于赤道轨道 $i = 0^\circ$，$(\Delta\omega)_{\text{day}}$ 最大，大约可达 20°/d，如若令

$$5\cos^2 i - 1 = 0 \rightarrow i = \arccos\sqrt{\frac{1}{5}} = 63.43^\circ$$

对于这样的轨道倾角，$(\Delta\omega)_{\text{day}} = 0$，其联拱线将不改变位置（如苏联的 Molnya 如）。当 $i < 63.43^\circ$ 时，联拱线的旋转是朝东的，$i > 63.43^\circ$ 时朝西，变化的详细情况见图 8.13。

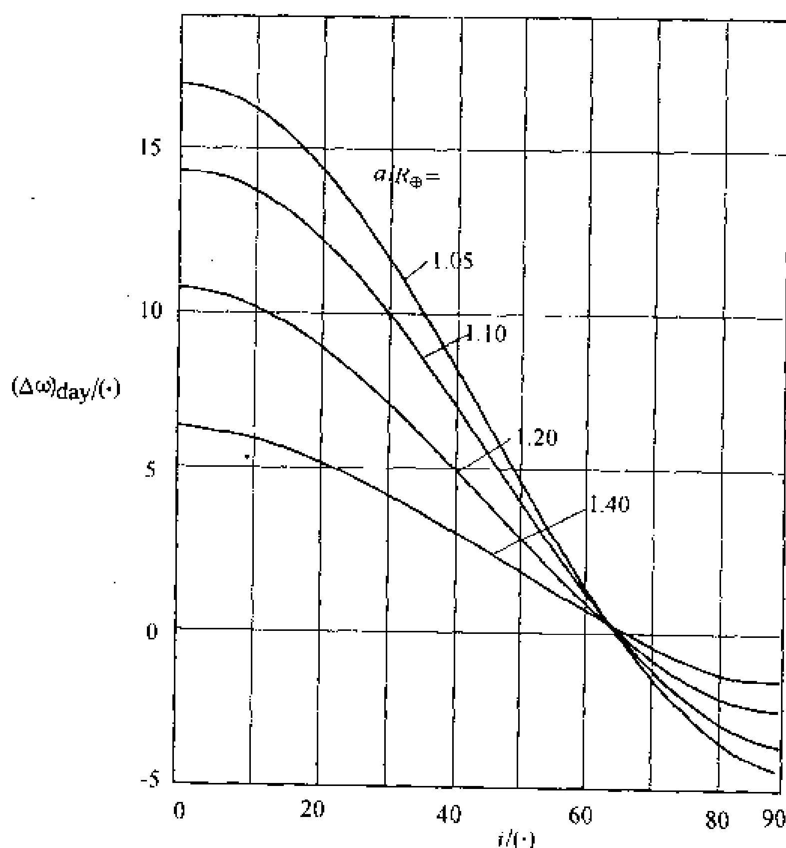


图 8.13 i 与 $(\Delta\omega)_{\text{day}}$ 的关系曲线

d. 地球扁率的其他影响

前面曾说明，干扰力的作用结果，将产生长期和周期摄动。对于地球扁率而言，它所产生的其他影响将只是周期性的摄动。

周期摄动，对于 a 和 e 较大（对 a 约为几公里）；对 i、Ω、ω 较小（叠加到 Ω 和 ω 的长期摄动上）；摄动的周期为 $\tau_p = \tau + \Delta\tau_p$，其中 $\Delta\tau_p \approx$ 几秒。

8.3.2　低地球轨道的气动力摄动和轨道寿命

a. 气动力

对于低地球轨道(LEO - Low Earth Orbit)空气动力的影响很大,一般情况下应使用计算机计算,而为得到近似结果,可作如下假设。

1) 大气层是球对称的(无扁率,日下点无密度峰等);

2) 大气密度与高度的关系符合

$$\rho = \rho_0 \exp\left(1 - \frac{h - h_0}{H}\right) \tag{8.58}$$

其中,ρ 和 ρ_0 分别是对应高度 h 和 h_0 处的大气密度;H 是标高,它的取值与大气类型和距理论地球高度有关。通常在计算某一高度 ρ_0 附近的大气密度时,根据附录1的原则找到对应时间的大气类型,依据大气类型查表确定 ρ_0 和 H,对应于 h 高度的大气密度,便可由上式算出;

3) 大气层不旋转;

4) 卫星的横截面为常量。

大气层对空间飞行器运动的影响是通过气动力产生的。气动力又可分解为阻力 f_r,升力 f_σ 和侧向力 f_n(图 8.14),其中

f_r—— 阻力,与速度方向相反;

f_σ—— 升力,在轨道平面垂直于速度;

f_n—— 侧向力,垂直于轨道平面。

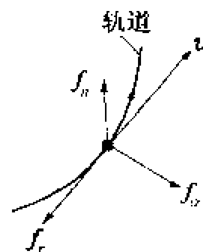


图 8.14　气动力分量

三个分力中以 f_r 的影响最为重要,其表达式为

$$f_r = -\frac{1}{m} C_D A \frac{\rho}{2} v^2 \tag{8.59}$$

式中

m—— 卫星质量;

A—— 卫星垂直于速度方向的截面面积;

C_D—— 阻力系数。

在轨道处,气体极为稀薄,衡量气体稀疏度的克努森数远大于 1,即

$$K_n = \frac{\text{平均分子自由程}}{\text{卫星特征尺寸}} >> 1$$

可以认为大气层是自由分子流状态,在卫星的附近分子之间无碰撞,阻力是由分子碰撞卫星得到的。在 100 km 以上的高度,上述条件可以得到满足。此时,C_D 与卫星的温度、气体温度和卫星速度有关,在大多数情况下,有

$$C_D = 2.2$$

对结构复杂和侧向面积较大的卫星,C_D 值与上式相差较多。

b. 圆轨道的气动摄动

对于圆轨道 $a = r$,$da = dr$,因此,从式(8.44)和式(8.59),可求得

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2r^2 v}{\mu} \frac{C_D A}{m} \frac{\rho}{2} v^2 \tag{8.60}$$

令

$$B = \frac{m}{C_D A}$$

为飞行器的弹道参数，对于圆轨道，还有

$$v^2 = \frac{\mu}{r}, v\mathrm{d}t = r\mathrm{d}\theta$$

所以式(8.60)成为

$$\mathrm{d}r = -\frac{2r^2}{\mu}\frac{1}{B}\frac{\rho}{2}\frac{\mu}{r}r\mathrm{d}\theta = -\frac{r^2\rho}{B}\mathrm{d}\theta$$

对圆轨道的一周进行积分(ρ = const.)，得

$$(\Delta r)_{2\pi} = -\frac{2\pi r^2\rho}{B + 2\pi r\rho} \tag{8.61}$$

考虑到高度 $h = r - R_\oplus$，$\Delta r = \Delta h$，上式还可以变换为卫星运动一周高度的变动

$$(\Delta h)_{2\pi} = -\frac{2\pi(R_\oplus + h)^2}{\mathrm{B} + 2\pi r\rho}\rho(h) \tag{8.62}$$

可见，每周降低的高度主要与大气密度 $\rho(h)$ 有关。按上式及附录1中给出的空气密度计算方法求得 $\rho(h)$，卫星每运动一周下降的高度的计算结果列于图8.15中，以 $(\Delta r)_{2\pi}B$ 与 h 的关系示出。

【例2】 试计算在不同高度圆轨道上的空间站，为保持其轨道高度所需的燃料月耗量及和年份的关系，设空间站的参数如下：总质量 $m = 10^6$ kg；因有较大的太阳帆板，所以 B 值较小，为 100 kg/m²；校正轨道所用燃料有较好的性能，w = 3 000 m/s。

【解】 设空间站的设计轨道半径为 r_2(图8.16)，因空气阻力的影响逐渐下降到半径为 r_1 的圆轨道。我们的任务是把空间从 r_1 提高到 r_2 圆轨道。若修正轨道时，利用两圆轨道之间的霍曼过渡，每次所需的总速度增量是

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1 + r_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_1 + r_2}\cdot\frac{r_1}{r_2}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

设 $r_1 = r, r_2 = r + \Delta r$，则上式成为

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}\cdot\frac{r + \Delta r}{2r + \Delta r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r + \Delta r}\cdot\frac{r}{2r + \Delta r}} + \sqrt{\frac{\mu}{r + \Delta r}} =$$

$$\sqrt{\frac{2\mu}{r}\cdot\frac{1 + \Delta r/r}{2 + \Delta r/r}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r}\cdot\frac{1}{(1 + \Delta r/r)(2 + \Delta r/r)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}} + \sqrt{\frac{\mu}{r}\frac{1}{1 + \Delta r/r}}$$

以近似式 $(1 + x)^{\pm\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x \mp \cdots$ 代入，因 $\Delta r/r$ 较小，$(\Delta r/r)^2$ 及其高次方项均可略去，得

$$\Delta v \approx \sqrt{\frac{\mu}{r}}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Delta r}{r}\right)\right] - \sqrt{\frac{\mu}{r}}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Delta r}{r}\right)\right] -$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{r}} + \sqrt{\frac{\mu}{r}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r}\right) \approx \sqrt{\frac{\mu}{r}}\left[\frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r} - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right]$$

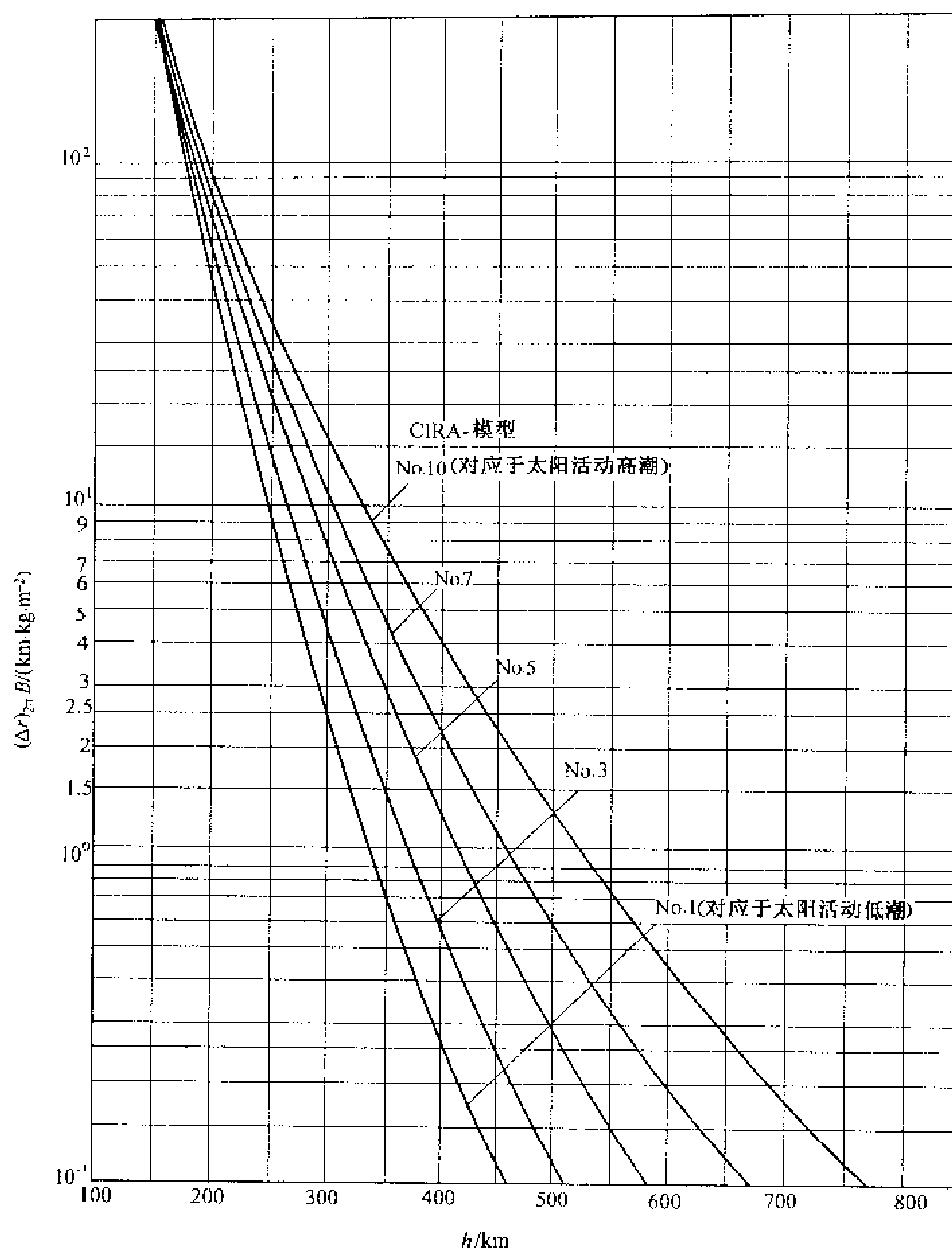


图 8.15　轨道高度对降高的影响

$$\Delta v \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}(\Delta r) \tag{8.63}$$

假如卫星每运动一周，由于空气动力而下降的高度是$(\Delta h)_{2\pi}$，则为补偿这一高度降所需的速度增量为

$$(\Delta v)_{2\pi}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}(\Delta h)_{2\pi}$$

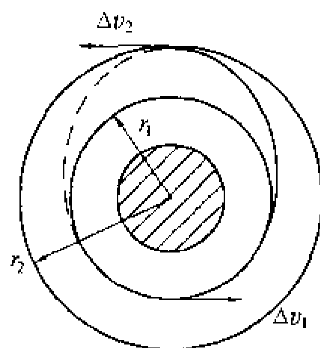


图 8.16　轨道保持

若空间站的轨道周期为 $\tau=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$，则每月所需的速度增量之和是

$$(\Delta v)_{\text{month}}=\frac{30\times 24\times 3\,600}{\tau}(\Delta v)_{2\pi}=$$

$$\frac{2.592\times 10^6}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}(\Delta h)_{2\pi}=\frac{8.22\times 10^{10}}{r^3}(\Delta h)_{2\pi} \tag{8.64}$$

上式若取 r 单位为 km，$(\Delta h)_{2\pi}$ 为 m，所得结果为 m/s。

若从附录 1 中求出大气的密度 $\rho(h)$，代入式(8.62) 求出 $(\Delta h)_{2\pi}$，再由式(8.64) 求得 $(\Delta v)_{\text{month}}$，最后以附录 2 中式(附 2.4) 算出为保持轨道高度所需的月燃料耗量 $(\Delta m)_{\text{month}}$。将 1988 年和 1992 年计算的结果，分别列于下表。曲线表示见图 8.17。

表 8.1　燃料消耗情况

年	$F_{10.7}$	CIRA 模型类	h/km	$(\Delta h)_{2\pi}$/m	$(\Delta v)_{\text{month}}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	Δm/kg
1988 太阳活动低潮	74	2	300	34	9.41	313
			350	11.5	3.11	103
			400	4.5	1.19	39.6
			450	1.8	0.466	15.5
			500	0.75	0.189	6.3
1992 太阳活动高潮	149	5	300	72	19.9	661
			350	29	7.85	261
			400	12.5	3.31	110
			450	6.0	1.55	51.6
			500	3.0	0.76	25.3

c. 气动阻力和人造卫星的轨道寿命

把式(8.58) 代入式(8.61)，得(将高度差改为轨道半径差)

$$(\Delta r)_{2\pi}=-\frac{2\pi r_0^2}{B}\rho_0\exp(-\frac{r-r_0}{H})$$

这是圆轨道卫星旋转一周降低的高度，旋转一周的时间为 $\tau_0=2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{\mu}}$，$r_0$ 是初始轨道半径。如认为 $\frac{\tau_0}{(\Delta r)_{2\pi}}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$，便有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=-\frac{\tau_0 B}{2\pi r_0^2\rho_0}\exp\left(-\frac{r_0-r}{H}\right) \tag{8.65}$$

积分上式，就可求出从初始高度 r_0 降至最终高度 r_L 的时间，即卫星的轨道寿命。一般取 $r_L=133.8\ \text{km}+R_{\oplus}$，半径为 r_L 圆轨道卫星周期为 $\tau=87$ min。我们认为当卫星达此高度时，即

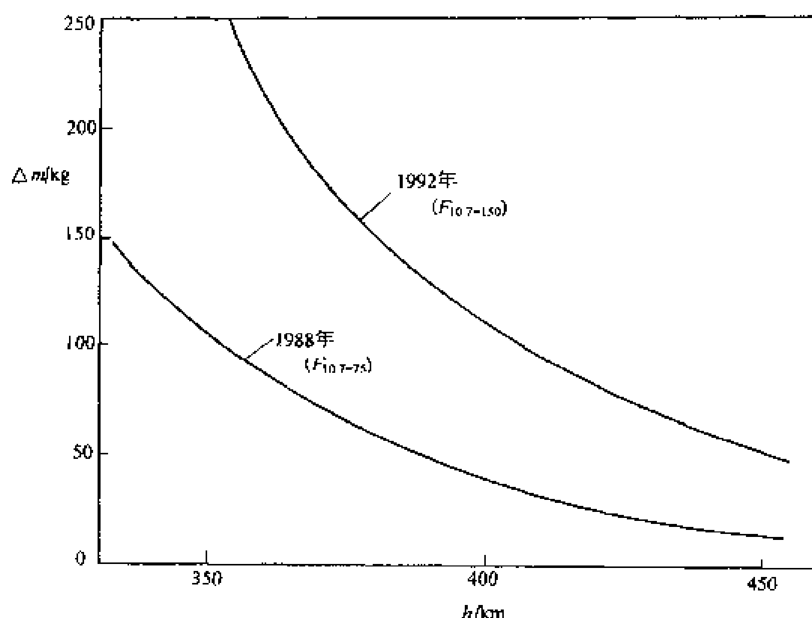


图 8.17　保持空间站轨道所需的燃料月耗量

在稠密大气中焚毁或坠落。上式积分后，得卫星轨道寿命

$$T_L = t_L - t_0 = -\frac{\tau_0 BH}{2\pi r_0^2 \rho_0} \exp\left(-\frac{r_0 - r}{H}\right)\Bigg|_{r_0}^{r_L}$$

或

$$T_L = \frac{\tau_0 BH}{2\pi r_0^2 \rho_0}\left[1 - \exp\frac{r_0 - r_L}{H}\right] \tag{8.66}$$

这是近似估算式，其误差约10% ~ 15%。上式中 H 应取对应于 r_0 和 r_L 处的平均值，大约为 50 km(参考附录 1 中图附 1.3)，若近似地取

$$r_0 - r_L > 4H$$

则

$$1 - \exp\left(-\frac{r_0 - r_L}{H}\right) \approx 1 \qquad (\text{误差} < 2\%)$$

所以

$$T_L = \frac{\tau_0 BH}{2\pi r_0^2 \rho_0} = \frac{BH}{\sqrt{\mu r_0}\rho_0} \tag{8.67}$$

由上式求出

$$\frac{T_L}{B} = \frac{H}{\sqrt{\mu r_0}\rho_0}$$

根据卫星高度 h，由附录 1 中的图附 1.2 和图附 1.3 分别求出 ρ_0 和 H，由上式算得的轨道寿命如图 8.18。

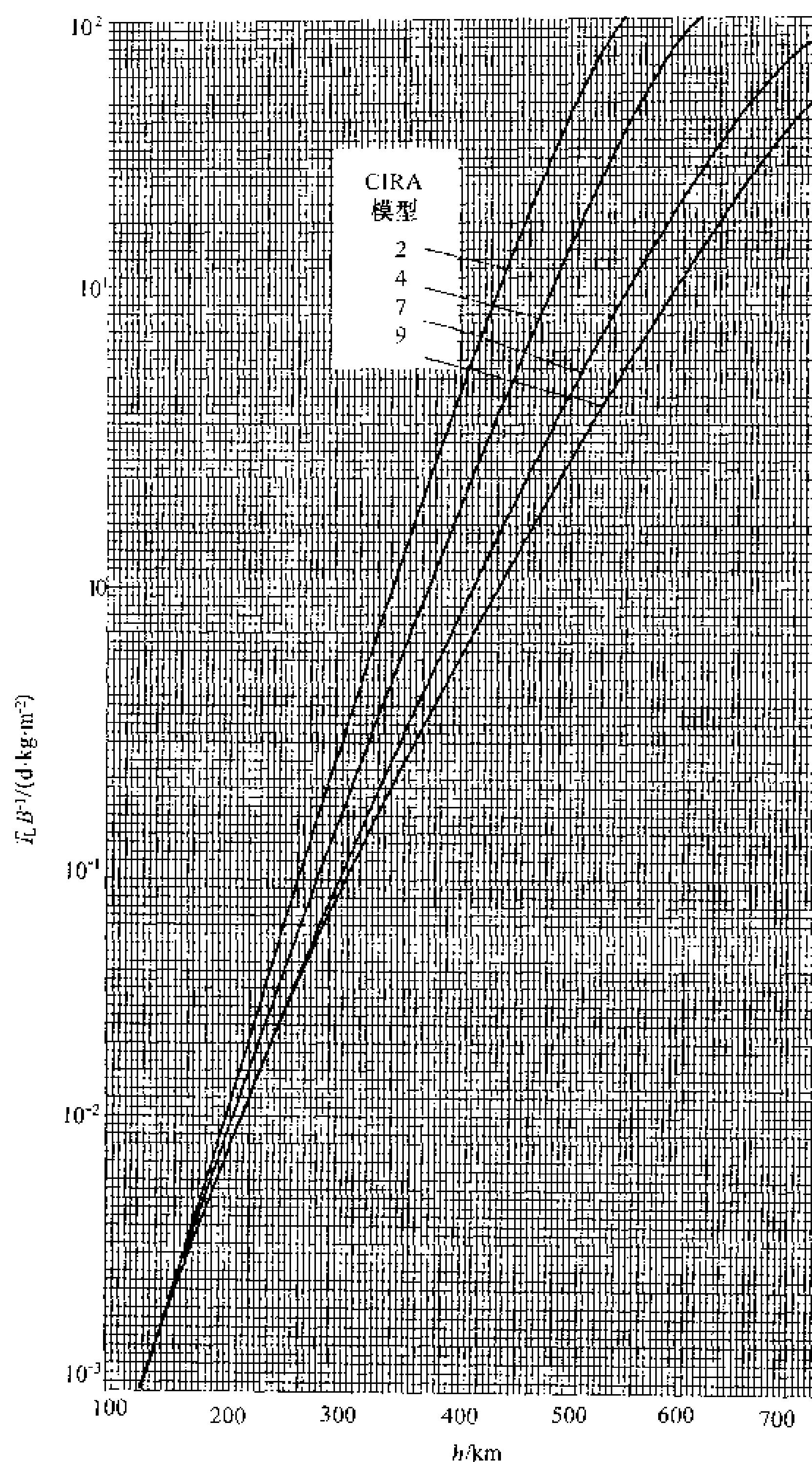


图 8.18　圆轨道的轨道寿命

d. 轨道高度随时间的下降

对式(8.65)在 r_0 和任意半径 r 间积分，当 $t_0 = 0$ 时，有

$$r = r_0 + H\ln\left[1 - \frac{2\pi r_0^2 \rho_0}{\tau_0 BH} t\right]$$

或

$$h = h_0 + H\ln\left[1 - \frac{\sqrt{\mu r_0}\rho_0}{BH}t\right] \quad (8.68)$$

按式(8.68)绘出的卫星高度与时间关系见图 8.19。可见，卫星降至某一高度(如 h_L)后，便迅速坠毁，其值大约为 $h_L \approx 130$ km 左右。

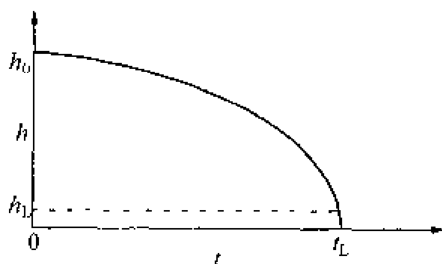


图 8.19　轨道高度与时间的关系

e. **大气阻力对椭圆轨道的影响**

大气阻力在近地点影响最大，且与纬度和当地太阳时有关，准确计算要靠计算机完成，下面进行定性估计。

把弹道参数 $B = \frac{m}{C_D A}$ 代入式(8.59)，得空气阻力

$$f_r = -\frac{1}{B}\frac{\rho v^2}{2}$$

再把 f_r 代入式(8.44)，得

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a^2 v^3}{\mu B}\rho(h) \quad (8.69)$$

而由式(8.46)，得

$$\frac{de}{dt} = -\frac{v}{B}(e + \cos\theta)\rho(h) \quad (8.70)$$

可见 $\frac{da}{dt} < 0$(恒小于零)，而 $\frac{de}{dt}$ 在 $\cos\theta = -e$ 处变号，该处 $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{1 - e^2} = a$(如图8.20)，在近地点一侧 $\frac{de}{dt} < 0$ 点，而在远地点一侧 $\frac{de}{dt} > 0$。但由于近地点一侧大气影响大于远地点一侧，所以大气的平均影响是使 $\frac{de}{dt}$ 为负，即 e 不断减小。可见，卫星的轨道在大气阻力的影响下，将越变越小，越来越圆。假如粗略地把大气看成只在近地点对卫星有影响，远地点不存在阻力作用，则当卫星经近地点时会损耗一些能量，致使远地点降低，但在远地点因无阻力而不会产生能量损耗，还会返回原来的近地点。因此可以知道，卫星的远地点高度下降得要比近地点快得多。图 8.21 所示是对一种卫星的计算结果，可以看到远地点高度和偏心率都是下降很快的，而近地点却变化缓慢。

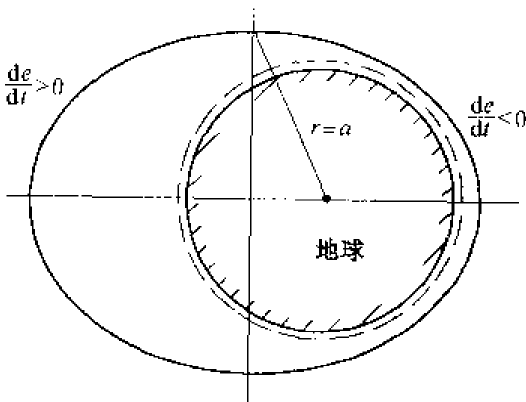


图 8.20　大气对椭圆轨道的摄动

【**例 3**】　欧洲卫星 HEOS(High Earth Orbit Satellite)远地点和近地点高分别为 h_a = 200 000 km 和 h_p = 400 km，质量 m = 104 kg，横截面积 $A = 1.2\ m^2$，试求其每回转一周远地点下降的高度 $(\Delta a)_{2\pi}$。

【**解**】　经计算，该卫星具有

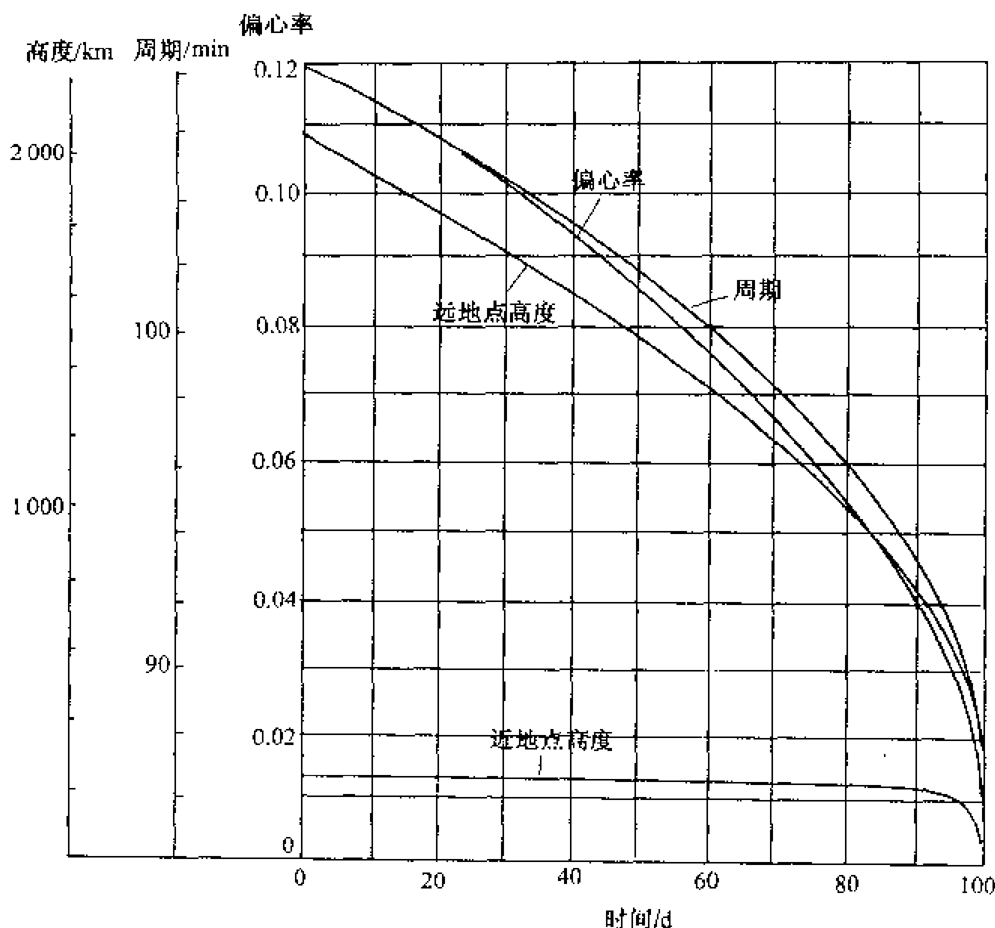


图 8.21　椭圆轨道参数随时间的变化

$$e = 0.936, a = 106\ 570 \text{ km}, B = 38.8 \text{ kg/m}^2$$

由附录1中图附1.2和图附1.3查出 $\rho_p = 2 \times 10^{-12}$ kg/m^3 和 $H = 70$ km。由下式(证略)

$$(\Delta a)_{2\pi} = -\frac{\rho_p a^2}{B}\sqrt{\frac{2\pi H(1+e)^3}{ae(1-e)}}$$

算出

$$(\Delta a)_{2\pi} = -415 \text{ m}$$

8.3.3　地球静止轨道(GSO—Geostationary Orbit)的摄动

在GSO上运行的飞行器受到的主要干扰力有：

(1) 太阳和月亮的引力；

(2) 地球赤道截面的椭圆形状。

a. 南—北摄动

由太阳和月亮的引力造成。以太阳为例(图8.22)，地球赤道与黄道平面构成23°27′的夹角，卫星运动到距太阳远近不同的地方，它们在法向的分量 f_{n1} 和 f_{n2} 也大小互不相同，其差在冬和夏季为最大，形成的平均力矩方向一直保持沿赤道与黄道的交线指向春分点，这就是太阳引力造成的干扰力矩 $\boldsymbol{M}$。在太阳引力干扰力矩的作用下，角动量会产生运动，

表现为轨道平面绕进动轴的旋转，进动轴应同时垂直于 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{M}$，其转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，并保持 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}$ 的关系。静止轨道卫星的角动量 $\boldsymbol{h}$ 与地轴重合，所以轨道面的进动形成了卫星半周在赤道以南，另半周在赤道以北的运动，且偏离的幅值越来越大，这就是南一北摄动，其结果，使轨道倾角 i 不再保持为零（图 8.23）。

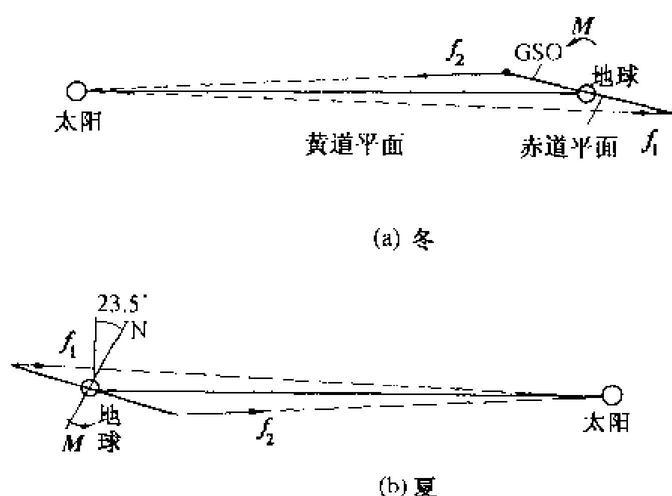


图 8.22　太阳对 GSO 的摄动

经计算，太阳和月亮的综合影响每年约为

$$\Delta i = 0.85°$$

现代通信卫星的要求 $\Delta i = 0.1°$ 左右。为保持轨道平面的倾角在此要求之内，应在 a 和 b 两点（图 8.23）施加一垂直于轨道平面的速度增量，以修正轨道平面的方向。

$$(\Delta v)_{年} = 2 v_{GSO} \sin \frac{\Delta i}{2} \quad (8.71)$$

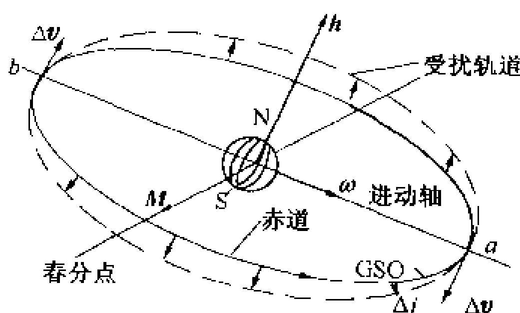


图 8.23　太阳引起的 GSO 南一北摄动

其中，v_{GSO} 是地球静止轨道卫星的速度。因此，每年需有 $(\Delta v)_{年} = 2 \times 3.075 \times \sin \frac{0.85°}{2} = 45.6$ m/s 的能量消耗，十年（现代通信卫星的寿命）的总速度增量为

$$\Delta v = 10\,\Delta v_{年} = 456 \text{ (m/s)}$$

则燃料的消耗（单组元的肼 $w = 2\,000$ m/s）为

$$\Delta m / m_0 = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{w}} = 0.20$$

即将近 20% 的质量消耗在维持轨道的南北方向稳定，如果采用电火箭（$w = 30\,000$ m/s）质量消耗可减小到 1.5%。

b. 东一西摄动

地球在赤道平面中的形状并非圆形而是略呈椭圆，其长轴在 $\lambda = -15°$ 到 165° 的直径方向，短轴则在 $\lambda = 75°$ 和 255° 之间。这种椭圆截面，给我们把地球想象为由两个分别位于长轴中心点两侧的双引力中心组成（图 8.24）的依据。这种双引力中心构形，形成方向不总通过几何中心的引力将引起同步轨道卫星相对地球作东一西方向的谐振运动。

图 8.24 所示为地球赤道截面，它与地球固定，并随之逆时针（自西向东）转动。但此图是站在赤道上观看的，因此地球赤道截面和同步轨道 GSO 上的卫星都是静止不动的。然而双引力中心的存在却使 GSO 卫星不能保持稳定。假如在 1 点的静止卫星，地球对它的引

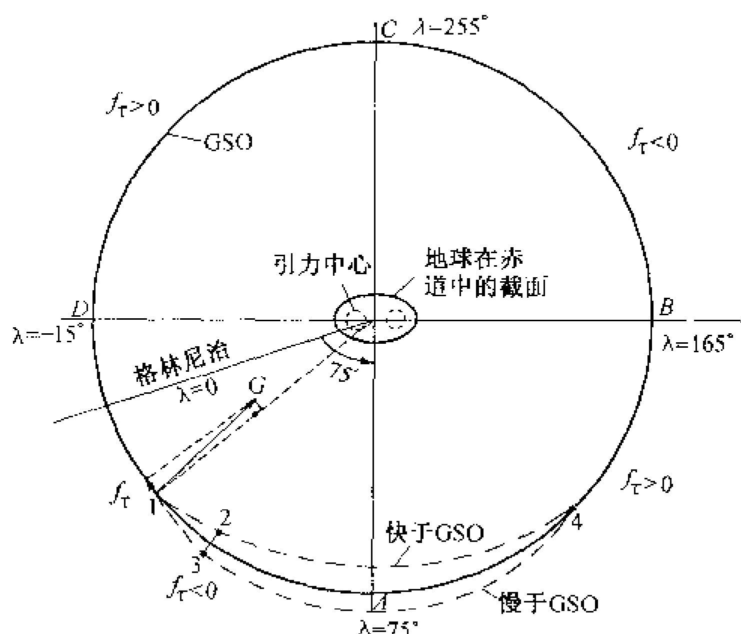


图 8.24　切向摄动力分量的分布

力 G 并不指向地心，而是偏向靠近它的引力中心，因而出现了切向分力 f_τ。在 f_τ 的作用下，使卫星减速离心力变小而下降。位置下降的结果，是速度增加，并经 2 点不断相对于地球向前(东)运动。当飞行器超过椭圆的短轴后，切向力反向，其作用改变为使卫星相对地球的东向速度减速，直至达到与 1 点相对短轴对称的 4 点，此时与地球是相对静止的。在 4 点又出现了和 1 点类似的切向力，但其作用是让卫星提高飞行高度。半径增加使卫星相对于地球减速，渐渐地又返回到原出发点 1，完成了一次向东再向西振荡运动，这种循环往复的东西方向的运动即所谓的东 — 西漂移。

事实上，经推导，切向分力可表达为

$$f_\tau = 0.58 \times 10^{-7}\sin[2(\lambda - 75°)] \tag{8.72}$$

它在 $\lambda = -15°$、$75°$、$165°$ 和 $255°$ 处为零，而在 $\lambda = 30°$、$120°$、$210°$ 和 $300°$ 处为最大值。把 f_τ 代入式(8.44)，得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 1.16 \times 10^{-7}\,\frac{a^2 v}{\mu}\sin[2(\lambda - 75°)] \tag{8.73}$$

显见，在图 8.24 的 1 点处 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} < 0$，卫星轨道半径变小，速度却增加；在 4 点处其变化趋势则相反。图 8.24 的赤道截面被分为四个区域：

$$-15° < \lambda < 75° \text{ 和 } 165° < \lambda < 255°,\ f_\tau < 0,\text{加速区域}$$

$$75° < \lambda < 165° \text{ 和 } 255° < \lambda < 345°,\ f_\tau > 0,\text{减速区域}$$

这四个区域交界点，是四个平衡点，在这些点上的静止卫星不出现切向力，应该是静止不动的。然而在其中 $\lambda = 75°$ 和 $255°$ 两点上卫星是稳定平衡的；$\lambda = -15°$ 和 $165°$ 处卫星是不稳定的平衡。在这四个平衡点，当卫星受到扰动稍许偏离后，在稳定平衡点的卫星会自动返回原点，而在不稳定平衡点，卫星却越跑越远并成为东 — 西振荡的飞行器。

在不同经度的卫星，其漂移率各不相同，图 8.25 给出了可能的漂移值。通常同步轨道卫星允许的漂移量为 $\Delta\lambda = \pm 0.1°$，因而要在二至三周对其进行一次东—西漂移的修正。

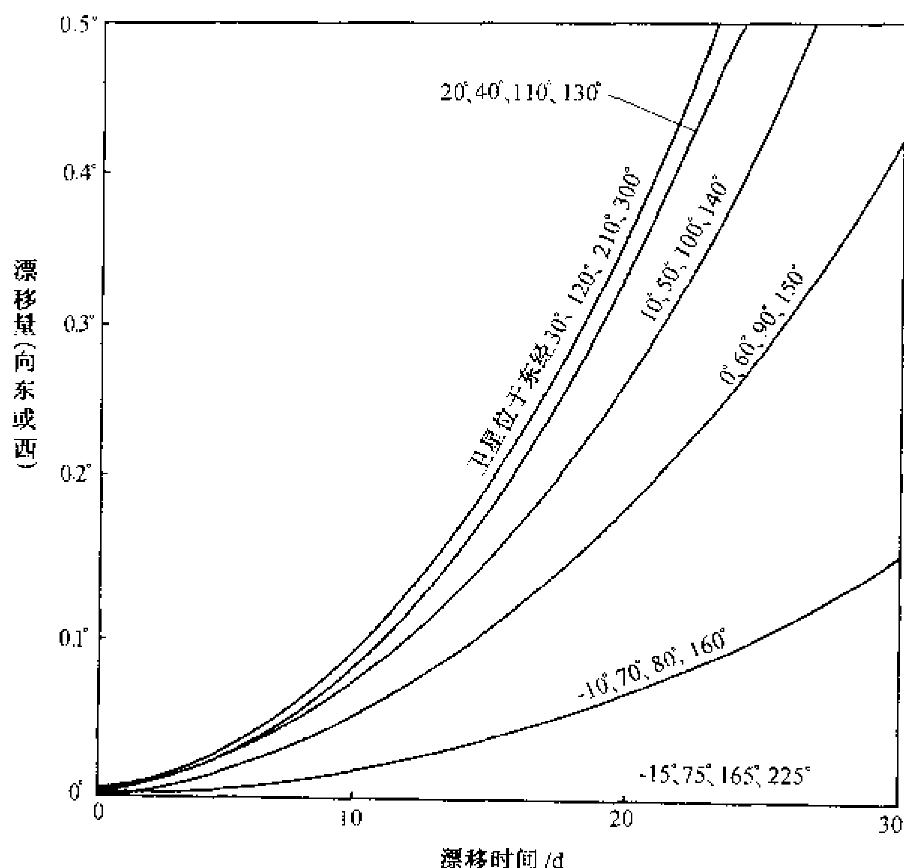


图 8.25　不同经度卫星的漂移速度

修正的过程如图 8.24中 1，2，3 三点所示，在这个随地球一同转动的图中，从 1 点到 2 点是卫星圆轨道降低而向东偏移的过程，2 点到 3 点是对卫星进行修正使轨道抬高的过程，而 3 点到 1 点是反向漂移过程。在惯性空间观察时，上述过程如图 8.26 所示，在卫星降低到 2 点时，施加一加速脉冲 Δv_1，使飞行器沿着霍曼轨道飞向比同步轨道稍高的 3 点，在那里再加第二个加速脉冲 Δv_2，让卫星过渡到过 3 点的圆轨道。此后在切向力 f_τ 的作用下，卫星沿过 1 点的曲线返回到 2 点。不过，由 2 点沿霍曼轨道至 3 点大约只需要半天左右即可完成，从 3 点经 1 点返回 2 点的过程却是漫长的，因卫星所在点经度的不同而异，一般需时 2 至 3 周的时间(即 14 ~ 21 圈)。

为修正东—西漂移所需的速度增量比南—北漂移所需的少，一般有

$$(\Delta v)_{东西} < \frac{1}{20}(\Delta v)_{南北}$$

修正卫星的南—北与东—西漂移，使其能够正常定轨工作，所需燃料成为同步轨道卫星的主要载荷之一，也是决定卫星轨道寿命的主要因素。

由于同步轨道卫星的漂移，特别是东—西漂移，使卫星的碰撞成为可能，引起了有关国家的重视。1977 年之后世界无线电管理大会，委托国际电信联盟，按照公平利用的原则

将经度位置分配给有关国家。特别当同一经度分配给几个不同国家或组织时，避免碰撞就成为十分重要的工作。

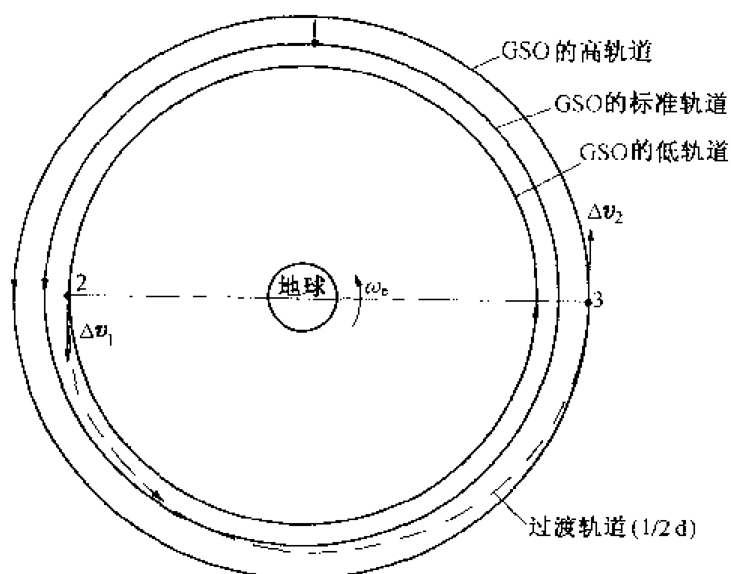


图 8.26　GSO 的轨道修正

第九章 空间飞行器的返回

空间飞行器是指在地球大气层以外的宇宙空间按照天体力学规律运行的各类飞行器。人造地球卫星、载人飞船、航天飞机和空间探测器都是空间飞行器。为了完成规定的任务，需要进入引力体外围大气并到达其表面的空间飞行器称为进入式空间飞行器。习惯上把进入地球大气层叫"再入"，因为飞行器绝大多数是从地面发射的，已通过一次大气，所以称为"再"。如在地面上安全着陆则称为"返回"。飞行器返回与很多科学技术有关，如空间飞行器动力学、空气动力学、防热结构学、控制与导航学、火箭发动机技术、测控技术、回收与着陆技术。它是由上述学科和技术的有关部分组成的一门新的综合性的边缘学科。

当引力体表面无大气或大气极为稀薄时，向其表面的降落，主要借助反作用发动机装置。而向地球返回的飞行器则可利用地球周围的大气作为主要的减速手段，既可省去了反作用推力装置及相应的燃料，又可增加发射时的有效负荷。

本章着重研究的是向地球表面返回时大气层外的轨道飞行段和在大气中的气动飞行段的动力学问题。

9.1 空间飞行器的返回过程

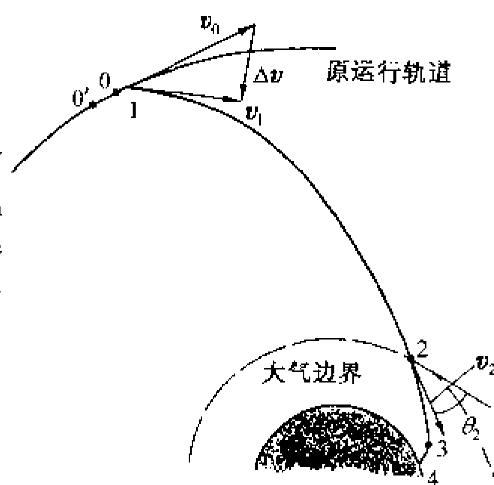


图 9.1 返回的主要阶段

从环绕地球的运行轨道返回地面，要经历四个主要阶段，即制动段、大气层外飞行段、大气层内飞行段、着陆段，其过程如图 9.1 所示。0′ 点为飞行器在运行轨道上的调姿起始点，0 点为制动点，1 点为制动火箭工作结束点，2 点为返回到大气层的返回点，3 点为开伞点，4 点为着陆点。

1. 制动段

该段也称离轨飞行段。飞行器通过适当的调姿后，从制动火箭发动机开始工作点 0(即制动点) 到其工作结束点 1 止，即 0 ~ 1 段。在这一段飞行时，飞行器除受地球引力作用外，还受到制动火箭发动机推力的作用，从而离开原来的运行轨道进入一条飞向地面的轨道。

由于制动火箭发动机推力的作用，飞行器的速度由原来的轨道速度 $\boldsymbol{v}_0$ 改变为 $\boldsymbol{v}_1$，$\Delta\boldsymbol{v}$ 为附加速度，从量值上比较，$\Delta\boldsymbol{v}$ 比 $\boldsymbol{v}_0$ 小得多，$\boldsymbol{v}_1$ 一般小于 $\boldsymbol{v}_0$，所以 $\Delta\boldsymbol{v}$ 又称为制动速度，$\Delta\boldsymbol{v}$ 与当地水平面组成的角称为制动角，一般情况下，制动发动机产生的推力矢量与飞行器的纵轴重合，因此，可以通过制动前的调姿段对飞行器姿态进行调整获得制动角。

实际上由于推力大小的限制，制动不可能瞬时完成，需要一定的工作时间，只是制动火箭的工作时间相对来说很短。在有限推力作用下，制动发动机对飞行器轨道的作用通常由推力的大小、推力方向和工作时间这三个因素来描述。在发动机工作期间推力矢量的方

向是用姿态控制系统或自旋稳定方法保持在制动方向上的。用自旋方法维持制动姿态的飞行器，在脱离运行轨道之后，还要消旋，其目的在于使返回飞行器进入大气层后能利用气动力的作用，按设计要求把防热结构稳定在朝前迎着气流的姿态上。

2. 大气层外飞行段

该段也称为大气层外自由降落段。该段从制动火箭发动机工作结束点 1 到返回地球大气层边界的 2 点，即 1 ~ 2 段。所谓大气边界是不存在的，只是人为的划分，其边界高度通常取为80 ~ 120 km，在此段中飞行器的轨道一般不加控制（但姿态要控制），飞行器仅在地球引力下作自由下降飞行。大气层外飞行段的轨道是中心引力场中的运动的一部分，可由飞行器在 1 点的状态代入轨道方程求得，当飞行器到达 2 点时，速度 v_2 称为进入（再入）速度，与当地水平面所成的夹角 θ_2 称为进入（再入）角。

飞行器的进入状态，即进入点 2 的位置、进入速度 v_2 和进入角 θ_2，对飞行器能否正常返回有着决定性的影响。

3. 大气层内飞行段

大气层内飞行段是指从返回 2 点，到着陆段开始的 3 点。返回点 2 是空气动力起明显作用的稠密大气层的最高点，从这点开始，空气动力对飞行器运动的影响不能忽略。而 3 点对于采用降落伞着陆的垂直着陆的飞行器，是指降落伞着陆系统开始工作的高度，一般 3 点离地面约 10 ~ 12 km。对于能够产生足够升力，可机动下滑到跑道上水平着陆的飞行器，其 3 点选择在地面开始导航的高度，例如美国航天飞机轨道飞行器为 25 km。返回飞行器在大气层内飞行段除了受地球引力外，还受到空气动力的作用，由于严重的气动加热和减速过载，以及落点精度控制这三个主要问题，使大气层内飞行段成为返回轨道中环境最恶劣、情况最复杂的一段。考虑气动力的轨道设计、制导和控制的研究是返回轨道设计、制导方法研究的重点。

4. 着陆段

返回式飞行器的着陆方式有垂直着陆和水平着陆两种。垂直着陆用降落伞系统，从降落伞系统开始工作到返回飞行器软着陆的轨道称着陆段，即从开伞点 3 到着陆点 4 的 3 ~ 4 飞行段。水平着陆的返回飞行器具有足够的升力，能够下滑到跑道上着陆。在水平着陆时，从返回飞行器到达着陆导引范围，并开始操纵活动翼面控制升力和阻力机动飞行时起，到返回飞行器达到着陆点这段轨道称为着陆段，也称为导引着陆段。

一般的返回飞行器多采用垂直着陆的方式，如图 9.2 所示。当返回到 15 km 左右的高度时，其速度可减小到声速，再继续下降，返回飞行器的速度将逐渐趋于稳定，保持在 100 ~ 200 m/s 左右。通常采用降落伞系统来实现着陆前的减速工作。

降落伞系统工作过程如下：当返回飞行器速度下降到 200 m/s 左右时（距地面高度 20 km 以下），降落伞系统开始工作。此时下降速度较大，为了降低对伞的质量和强度的要求，通常采用分步工作程序。首先拉出引导伞，以帮助减速伞和主伞工作。然后拉出减速伞，减速伞的功能有两个：第一使返回飞行器的速度由 200 m/s 降低到 60 m/s 左右，为主伞创造必要的开伞条件；第二对以亚声速运动的返回飞行器的姿态起稳定作用，这时的减速伞又称为稳定伞。最后，减速伞分离并拉出主伞。主伞的任务是完成最终的减速任务，保证返回飞行器达到每秒数米的预定速度。

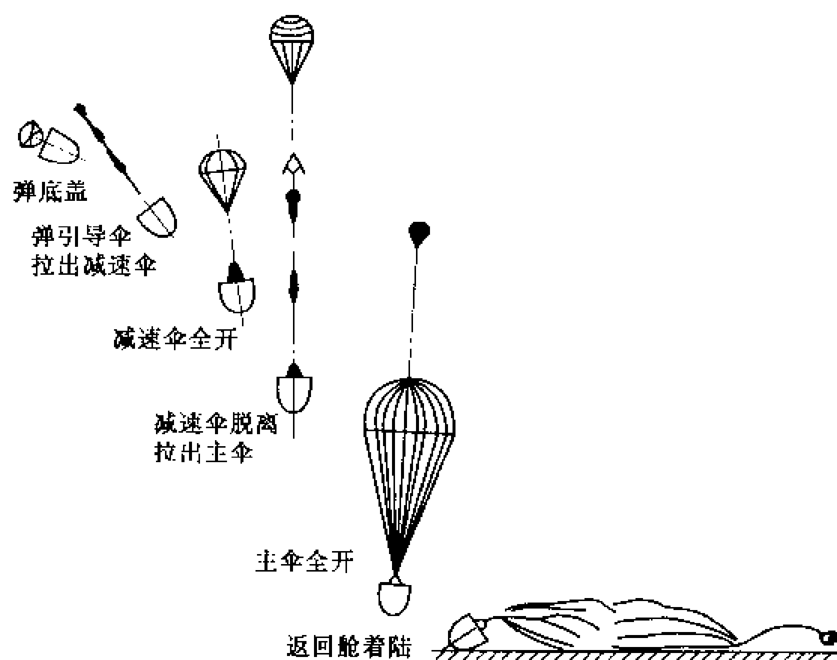


图 9.2　降落伞垂直着陆的过程

为减小着陆冲击过载,可采用缓冲火箭。当返回飞行器下降到距地面数米的高度时,着陆缓冲火箭工作,对返回飞行器加一负的冲量,使其着陆速度减小到 2 m/s 左右,大大减小着陆冲击过载。着陆缓冲火箭的主要特点是效能较高,能够在较小的过载条件下,将返回飞行器着陆速度减小到很低水平。这对载人飞行器的返回着陆十分重要。

水平着陆的返回飞行器着陆的过程与飞机类似,无需采用过多的其他措施。

9.2　返回式飞行器的分类

返回式飞行器可以用多种方法分类,例如按是否载人可分为载人和非载人的;按任务的不同可分为人造卫星、载人飞船和航天飞机;按用途可分为试验的、考察的和应用的飞行器;按是否可重复使用又可分为一次性和多次重复使用的飞行器等。

由于这类飞行器最重要的特征是要进入大气层,可以根据气动特性的主要特征——气动品质的差异以及控制方法的不同对其进行分类。

飞行器的气动品质又称升阻比,是指其升力系数与阻力系数之比。

根据飞行器在大气中的气动特性的不同,可以分为:

- 弹道式返回飞行器;
- 弹道 - 升力式(半弹道式)返回飞行器;
- 升力式返回飞行器。

根据飞行器返回过程中的控制方法,还可分为:

- 利用攻角 α 控制的返回飞行器;
- 利用滚转角 γ 控制的返回飞行器;
- 同时利用 α 和 γ 角进行复合控制的返回飞行器。

9.2.1　弹道式返回飞行器

弹道式返回飞行器亦称零气动品质返回飞行器，是指返回时，在其上的气动力只有阻力作用，不产生升力的飞行器。如人类的第一个返回式飞行器——苏联的"东方"号；美国的第一代载人飞船"水星"号；我国的第一代返回式卫星都属此类。

弹道式返回飞行器由于升阻比为零，且在大气层内的运动为无控的，返回状态由进入状态即进入点位置、进入速度大小和方向决定，这些量又是由大气层外飞行段轨道确定的，而大气层外飞行段轨道又取决于制动段的制动点位置和制动参数。因此一旦制动点位置和制动参数确定，整个返回轨道便确定了，无法调整。因此，运行轨道、制动点位置、制动姿态、制动参数、质量和气动系数等偏差都会造成落点参数很大的离散值，着陆点将有很大的散布。限制弹道式返回最大过载的主要办法就是控制再入角，如使宇航员承受的过载不超过容许值 8 ~ 10，再入角大小要控制在 3° 以下，这对制动离轨段的要求是很高的。尽管弹道式返回飞行器存在落点散布大和返回难度高等主要问题，但由于返回大气层不需控制，返回轨道比较陡峭，所经历的航程和时间较短，因而气动加热的总量也较小，防热问题相对而言较易解决，它的气动外形也不复杂，可做成简单的旋转体，如图 9.3。上述两点都使它的结构和防热设计大为简化，因而成为被最先采用的返回方式。

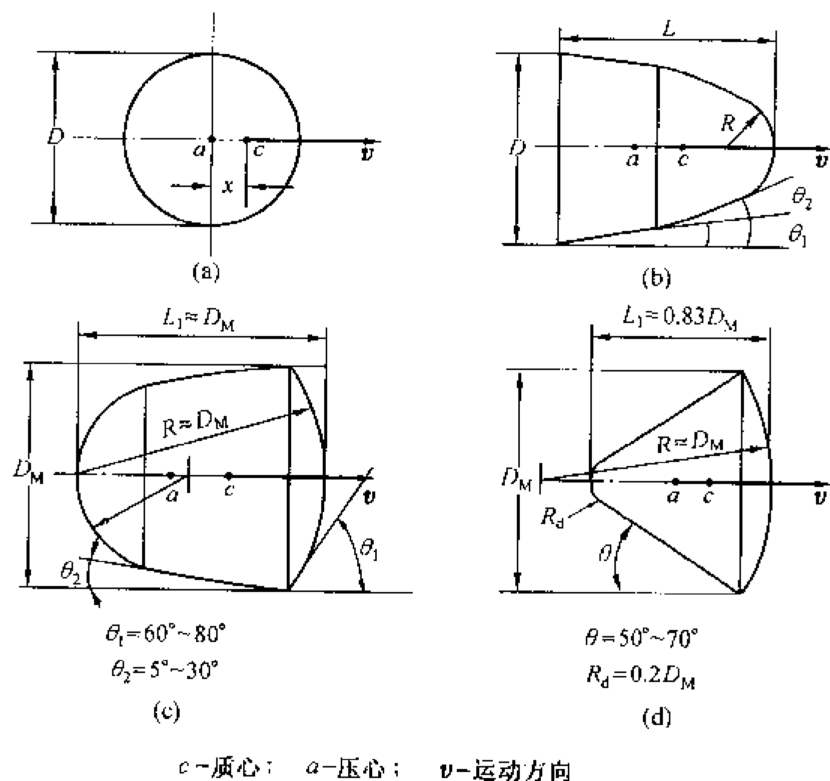


图 9.3　返回飞行器的形状

9.2.2　弹道－升力式返回飞行器

弹道－升力式返回飞行器亦称为小气动品质或半弹道式返回飞行器。在弹道式返回飞行器的基础上，通过气动或姿态控制的方法，使返回飞行器返回大气层时产生一定的升力，这种返回方式为弹道－升力式返回。弹道－升力式返回的飞行器，外形与弹道式的类

似，但其质心不在飞行器的中心轴线上，而是配置在偏离中心轴线一定距离的地方，使飞行器能够以一个不大的称为平衡或配平攻角的状态飞行，同时也产生了有限的升力，一般不大于阻力的一半，即升阻比小于 0.5。

与弹道式返回相比，有限升力的返回飞行器，可以利用其升力降低返回的难度，改善返回状况。在相同的返回条件下，增大升阻比还可以减小最大过载和降低最大热流。此外，弹道 – 升力式返回飞行器在大气层内飞行段，通过控制可以改变升力矢量的方向，能在一定程度上调整返回飞行器在大气中的轨道，使其具有不大的机动飞行能力，可大大减小着陆点散布，有可能将返回飞行器的着陆点控制在较小的区域内。美国的"双子星座"号飞船首次采用了弹道 – 升力式返回，可在纵向 1 200 km，横向 110 km 的范围内调整着陆点。与采用弹道式返回的"水星"号载人飞船比较，"双子星座"号飞船的再入角的幅值由 3° 增大到 7°，最大过载由 10 下降到 5 以下，着陆点散布从百公里级下降到十公里级。

由于弹道 – 升力式返回飞行器既保持了弹道式返回飞行器结构简单和防热易于处理的特点，又能适当地利用升力控制轨道。因此，在需要降低最大减速过载和减小着陆点散布的场合下被广泛采用。在"双子星座"号以后的飞船或其他载人飞行器（如轨道救生艇）都采用了此类的返回方式。

9.2.3　升力式返回飞行器

升力式返回飞行器亦称为大气动品质返回飞行器。当要求返回飞行器水平着陆时，必须给返回飞行器足够大的升力，使返回轨道，特别是着陆段平缓到适合水平着陆的程度。返回飞行器升力的增大和可调整，大大增加了飞行器机动飞行的能力。平缓的返回段和大范围的机动飞行能力，使返回飞行器水平着陆和着陆到指定的机场跑道上成为可能。

能够实现水平着陆的升力式返回飞行器的升阻比一般都大于 1，即升力大于阻力，这样大的升力已不能再用偏离中心线配置质心的办法获得。因此升力式返回飞行器不能再用旋转体，只能采用升力体。升力体又可分为带翼和不带翼两种，升阻比都大于 1，但是不带翼的升力全靠形体产生，形体简单，控制困难。现有的飞行器，都是带翼的升力体，形状和飞机类似。

升力式返回飞行器由于大气层内飞行段比较平缓，航程和飞行时间都比弹道式和弹道 – 升力式返回飞行器长得多，虽然最大热流和最大减速过载都小，但总的加热量大且作用时间长。此外这种返回飞行器构形比弹道式的复杂得多，再加上多次重复使用的要求，使得这种返回飞行器的气动力问题、防热问题和结构问题变得十分复杂，这些问题是设计这种返回飞行器的关键。

9.3　大气层外的飞行

假设飞行器先是在半径为 r_1 的圆轨道上以速度 v_0 飞行，如图 9.4，在 1 点以制动脉冲 $\Delta \boldsymbol{v}$，使飞行器的速度变为 v_1，从原来的轨道进入到一条与地球大气相交的椭圆过渡轨道上，并于 2 点开始以 v_2 的速度和 θ_2 的进入角进入稠密大气。从 1 点到 2 点的椭圆轨道飞行，称做大气层外飞行段，因距地面高度是不断下降的，也称为大气层外自由下降段。显然，这里假设了大气层是从 2 点开始的（即大气为半径 r_2 的球体），在 r_2 以外没有气动力作

用在飞行器上。在1点，由速度矢量三角形，根据余弦定理，显然有

$$v_1^2 = v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0\Delta v\cos\alpha \tag{9.1}$$

若将 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 向 $\Delta\boldsymbol{v}_0$ 投影，还有

$$v_0 = v_1\cos\theta_1 + \Delta v\cos\alpha \tag{9.2}$$

从1点到2点为轨道飞行，由能量守恒和动量矩守恒方程式，有

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} \tag{9.3}$$

$$r_1v_1\cos\theta_1 = r_2v_2\cos\theta_2 \tag{9.4}$$

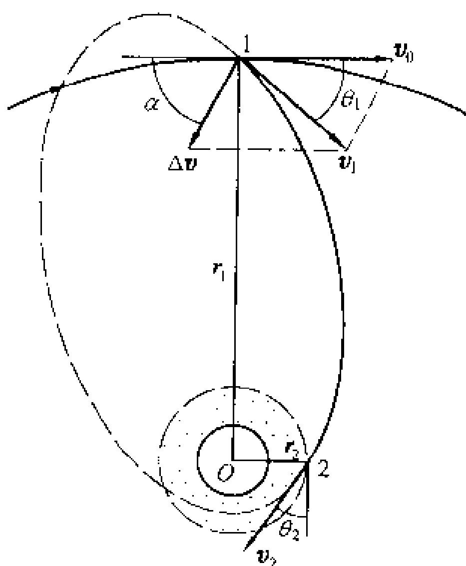


图 9.4 大气层外的飞行

上述四个方程中，包含 $\Delta v, \alpha, v_1, \theta_1, v_2$, 和 θ_2 六个变量，只要给出 Δv 和 α，便可求得其余四个量。不过，为了限制进入大气层之后的过载和气动加热，应该规定 θ_2 的数值，此时四个方程式里有五个变量，只能得到一个 Δv 和 α 的关系式。显然希望存在某个 α，使得 Δv 取最小值，即应该满足 $\mathrm{d}\Delta v/\mathrm{d}\alpha = 0$。

为确定最小的 Δv 及对应的 α，将式(9.2)和式(9.4)中 $v_1\cos\theta_1$ 消去，得

$$r_2v_2\cos\theta_2 = r_1v_0 - r_1\Delta v\cos\alpha \tag{9.5}$$

再对 α 求导，因 v_0, r_1, r_2, 和 θ_2 是确定值，则有

$$r_2\cos\theta_2 \cdot \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\alpha} = -r_1\cos\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\alpha} + r_1\Delta v\sin\alpha$$

根据最优化的要求，应有 $\mathrm{d}\Delta v/\mathrm{d}\alpha = 0$，因此

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\alpha}r_2\cos\theta_2 = r_1\Delta v\sin\alpha \tag{9.6}$$

式(9.1)和式(9.3)对 α 求导，考虑到 $\mathrm{d}\Delta v/\mathrm{d}\alpha = 0$，并消去 $\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}\alpha$，得

$$v_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\alpha} = v_0\Delta v\sin\alpha \tag{9.7}$$

把式(9.7)代入式(9.6)式得

$$\left(r_2\frac{v_0}{v_2}\cos\theta_2 - r_1\right)\Delta v\sin\alpha = 0$$

上式为零的条件有二

$$\sin\alpha = \sin\alpha_{\mathrm{opt1}} = 0 \quad 或 \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{opt1}} = 0 \tag{9.8}$$

及

$$r_2\frac{v_0}{v_2}\cos\theta_2 - r_1 = 0 \tag{9.9}$$

式(9.8)是最优值之一，而从式(9.9)中还可以求得另一最优 α 值。由式(9.5)求出 $r_2\cos\theta_2$ 代入式(9.9)，得

$$v_0^2 - v_2^2 - \Delta v v_0\cos\alpha = 0$$

再由式(9.1)和式(9.3)消去 v_1^2,求出 $v_0^2 - v_2^2$,代入上式,有

$$-2\mu\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-\Delta v^2+\Delta v v_0\cos\alpha = 0$$

对于圆轨道有 $v_0^2 = \mu/r_1$,则 α 的另一最优值为

$$\alpha_{opt2} = \arccos\left[\frac{2(r_1/r_2-1)+(\Delta v/v_0)^2}{\Delta v/v_0}\right] \tag{9.10}$$

对应的 $\Delta v/v_0$ 可写为

$$(\Delta v/v_0) = \frac{1}{2}\cos\alpha_{opt2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\alpha_{opt2}-8(r_1/r_2-1)} \tag{9.11}$$

当 α_{opt2} 为不同的取值时,以式(9.11)在 $\Delta v/v_0$ 及 r_1/r_2 平面上绘成曲线,如图9.5所示。因 $\alpha_{opt1} = 0$,则将 $\alpha_{opt2} = \alpha_{opt1} = 0$ 时得到的曲线称为 γ 曲线,它与纵轴所围的面积称为 Γ 区域。γ 曲线是两个最优状态的分界线,在 Γ 区域之外和 γ 曲线上,满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{opt1}} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\Delta v}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_{opt1}} > 0$$

而在 Γ 区域之内,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{opt2}} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\Delta v}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_{opt2}} > 0$$

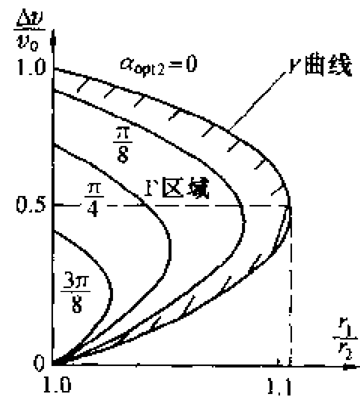


图9.5　最优区域划分

因此,根据极值原理,有如下结论:

(1) 在 Γ 区域之外和边界线 γ 上,最佳的 α 角为 α_{opt1}

(2) 在 Γ 区域之内,α 角的最佳值为 α_{opt2}

由于 Γ 区域对应的 r_1/r_2 最大值为 $r_1/r_2 = 1.125$,因此上述结论还可以叙述为:

(1) 如 $r_1/r_2 \geq 1.125$,或者 $r_1/r_2 < 1.125$,且满足

$$\frac{\Delta v}{v_0} \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8r_1/r_2}\ \text{或}\ \frac{\Delta v}{v_0} \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8r_1/r_2}\ \text{时}$$

则制动脉冲应朝圆轨道速度 v_0 的反方向施加,即 $\alpha = \alpha_{opt1} = 0$。这时的大气外的轨道飞行参数可如下求得。令 $\alpha_{opt1} = 0$,则由式(9.1)得 v_1 代入式(9.3),有

$$v_2 = v_0\sqrt{(1-\Delta v/v_0)^2+2(r_1/r_2-1)} \tag{9.12}$$

此时显然还有 $\theta_1 = 0$,将这一关系代入式(9.4),考虑到式(9.12)和 $v_1 = v_0 - \Delta v$,还可求出给定 θ_2 时的最小速度脉冲 Δv_{min}

$$\Delta v_{min} = v_0\left[1-\sqrt{\frac{2(r_1/r_2-1)}{\left(\frac{r_1/r_2}{\cos\theta_2}\right)^2-1}}\right] \tag{9.13}$$

(2) 当满足 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8r_1/r_2} \leq \frac{\Delta v}{v_0} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8r_1/r_2}$ 时,α 取 α_{opt2},对于 v_2 和

速度脉冲 Δv 有

$$v_2 = v_0\sqrt{1-(\Delta v/v_0)^2-2(r_1/r_2-1)} \tag{9.14}$$

和

$$\Delta v_{\min} = v_0\sqrt{1-2(r_1/r_2-1)-\left(\frac{\cos\theta_2}{r_1/r_2}\right)^2} \tag{9.15}$$

9.4 返回飞行器在大气内飞行的动力学方程式

与飞行速度比，姿态运动可以暂不考虑。由牛顿第二定律，当返回飞行器进入大气之后，其运动方程式可写为

$$m\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G} \tag{9.16}$$

式中，m 为返回飞行器的质量，$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 分别是作用在其上的反作用推力，气动力合力和中心引力体的引力矢量。在返回过程中，飞行器因气动力而形成的过载和加热与飞行速度的大小直接相关，而侧向速度比较小，下面的研究只需在铅垂的纵向平面中进行。在这个平面中，式(9.16) 可以在速度坐标系(见图 2.1) 中分解为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P_v - D - mg\sin\theta$$

$$m\left(v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right) = P_\theta + L - mg\cos\theta$$

式中，P_v 和 P_θ 是反作用力在速度和其垂直方向的分量；D 和 L 是大气阻力和升力；r 为自中心引力体质心到飞行器质心的半径；等式左侧是返回飞行器的惯性力。值得说明的是第 2 式，其中，θ 是速度与当地水平线的夹角，就和式(2.2) 左侧一样(只是那里的 θ_c 角是速度相对发射点水平线的夹角)，它的第 2 项是因沿轨道运动而产生的向心加速度在速度垂直方向的分量。

通常，气动阻力和升力可写成

$$D = \frac{\rho v^2}{2}S_m C_x,\ L = \frac{\rho v^2}{2}S_m C_y$$

其中，C_x 和 C_y 是飞行器的阻力和升力系数，S_m 为特征面积(一般取飞行器横截面积)，ρ 为大气密度，而 $\rho v^2/2$ 被称为动压头，具有压力的因次。把上述方程代入分量运动方程，整理后得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\sigma\frac{\rho v^2}{2} - g\sin\theta + \frac{P_v}{m} \tag{9.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sigma K\frac{\rho v}{2} + \left(\frac{v}{r}-\frac{g}{v}\right)\cos\theta + \frac{P_\theta}{mv} \tag{9.18}$$

其中，弹道参数

$$\sigma = \frac{S_m C_x}{m} \tag{9.19}$$

与飞行器单位质量的迎面气动阻力有关，而

$$K = L/D = C_Y/C_x \tag{9.20}$$

是前已定义的升阻比，又称气动品质。还有

$$g = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{9.21}$$

R 是中心引力体的半径，g_0 是其表面的重力加速度。

飞行器的运动学方程式是

$$\frac{dH}{dt} = v\sin\theta \tag{9.22}$$

$$\frac{dS}{dt} = v\cos\theta\left(\frac{R}{r}\right) \tag{9.23}$$

H 和 S 分别是飞行器高度和在引力体表面的运动距离。

气动力引起的过载定义为所受气动力与飞行器在地面时重量之比，则飞行器相应方向上的气动过载为

$$n_x = \frac{C_x S_m \rho v^2}{2mg_0} = \sigma\frac{\rho v^2}{2g_0} \tag{9.24}$$

$$n_y = \frac{C_Y S_m \rho v^2}{2mg_0} = K\sigma\frac{\rho v^2}{2g_0} \tag{9.25}$$

总的气动过载是

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sigma\frac{\rho v^2}{2g_0}\sqrt{1+K^2} \tag{9.26}$$

式(9.17)和式(9.18)是时变的非线性微分方程组，很难得到解析解，为了获得返回过程的特点和加热及过载的变化规律，通常都是进行近似分析，所得结果可供初步分析设计使用，精确计算要采用数值方法。对气动热分析，还应考虑到因高温造成的防热材料的烧蚀过程，需计入化学动力学和传热、热辐射影响等，是十分复杂的，已超出本课程的范围。

研究式(9.17)和式(9.18)两方程式的方法还有：

(1) 忽略方程式次要项，导出近似解析解；

(2) 对某些特例求精确解；

(3) 对于可任意改变升力和阻力的升力体飞行器进行小参数的级数求解；

(4) 利用相似理论，把返回飞行器的飞行轨道改造成一条相对轨道，以无因次相似参数进行分析。

9.5　大气内飞行时的过载、加热和控制

分析式(9.17)和式(9.18)，可以知道当初始条件已定之后，若不计制动发动机的推力 P_v 和 P_θ，惟一能够改变运动规律的参数就是弹道参数 σ 和气动品质 K。事实上，这两参数在空间飞行器返回过程中，起着十分重要的作用，相对来说气动品质 K 的影响更为重大，

对不同 K 值的飞行器，处理式(9.17)和式(9.18)方法是不同的，过载、加热的特性和控制方法亦有差异。

9.5.1 弹道式返回

当空间飞行器质心和气动力压力中心都位于几何对称轴上时，它们不产生升力，因而气动力品质 $K=0$，只剩下一个参数 σ 是可调节的。为了改变飞行器在大气内的飞行轨迹，只能通过改变初始条件来达到，影响最显著的应当是进入角 θ_2。通常弹道式返回的进入角绝对值不大，其初始段，因飞行速度高，接近于直线。为进行近似分析，假设：

(1) 大气密度随高度的变化符合

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta H) \tag{9.27}$$

其中，H 为飞行高度，β 是常数，ρ_0 是当 $H=0$ 时的大气密度

(2) $H << R$，即飞行高度远小于中心引力体半径

(3) 迎面阻力比重力分量在速度方向投影大得多，即

$$mg\sin\theta << C_x S_m \frac{\rho v^2}{2} = m\sigma\frac{\rho v^2}{2}$$

(4) 轨道倾角变化不大，即

$$\theta = \theta_2 = \text{const} \tag{9.28}$$

因此，当 $P_v=0$ 时，式(9.17)成为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\sigma\frac{\rho v^2}{2} \tag{9.29}$$

式(9.22)成为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = v\sin\theta_2 \tag{9.30}$$

由式(9.27)、式(9.29)和式(9.30)，便可求得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\sigma\rho_0}{2\sin\theta_2}\exp(-\beta H)\mathrm{d}H \tag{9.31}$$

积分后，得

$$\ln\frac{v}{v_2} = \frac{\sigma\rho_0}{2\beta\sin\theta_2}[\exp(-\beta H) - \exp(-\beta H_2)]$$

其中，下标 2 表示进入大气时的初始参数。再利用式(9.27)得

$$v = v_2 \exp\left[\frac{\sigma}{2\beta\sin\theta_2}(\rho - \rho_2)\right] \tag{9.32}$$

x 方向的过载如式(9.24)所示，其最大值发生在

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \exp\left[\frac{\sigma}{\beta\sin\theta_2}(\rho - \rho_2)\right] \tag{9.33}$$

为最大处，因此，上式对 ρ 求导数并令其为零，求得

$$\rho^* = -\frac{\beta\sin\theta_2}{\sigma} \tag{9.34}$$

代回式(9.32)，得发生 $n_{x\max}$ 时的速度

$$v_{n\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2\rho^*}\right) \tag{9.35}$$

对应的过载最大值由式(9.24) 得

$$n_{x\max} = -\frac{\beta \sin\theta_2}{2g_0} v_2^2 \exp\left(-1 - \frac{\rho_2}{\rho^*}\right) \tag{9.36}$$

通常有，$\rho_2 \ll \rho^*$，则式(9.35) 和式(9.36) 成为

$$v_{n\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.61 v_2 \tag{9.37}$$

$$n_{x\max} = -\frac{\beta \sin\theta_2}{2g_0 e} v_2^2 \tag{9.38}$$

由此易知，近似分析时可以认为过载的最大值和对应的速度值都和弹道参数无关，而减小初始轨道倾角 θ_2(绝对值)，会降低最大过载。

通过大气层返回时，气动加热十分严重，热量以对流与辐射方式传入飞行器，防护层的分解与烧蚀及飞行器向外的辐射带走一部分热量。通常，从地球轨道弹道返回时，飞行器临界点最大温度可能达到 2 000 ~ 2 700℃，总热流量可达 $(2.0 \sim 4.0) \times 10^8\ \mathrm{J/m^2}$。防热材料烧蚀过程大约从 2 000℃ 开始，飞行器内部温度可达几十摄氏度。

仅考虑对流传热，且气流呈层流状态时，在临界点的热流量可近似取为

$$\dot{Q} = k\rho^n v^m \tag{9.39}$$

其中，k 是与飞行器鼻端半径、附面层流动类型及气体的动力学特性有关的常数；对于层流附面层，当气体粘性与温度 $T^{1/2}$ 成比例时，有 $m = 3, n = \frac{1}{2}$。而返回飞行器的平均热流量，可表为

$$\dot{Q}_{cp} = \frac{1}{4} C_F \rho^{\frac{1}{2}} v^3 \tag{9.40}$$

此处，C_F 是当量表面摩擦系数，因此，返回过程中，飞行器吸入的总热量是

$$Q = \frac{1}{4} C_F S \int_{t_0}^{t_k} \rho^{\frac{1}{2}} v^3 \mathrm{d}t \tag{9.41}$$

式中，t_0 和 t_k 分别是返回的初始和终了时间，S 为返回飞行器的表面面积。

最后，飞行器临界点的温度可用斯捷番 ~ 波尔兹曼方程计算

$$T_{cr}^0 = \left(\frac{\dot{Q}}{\sigma^* \varepsilon}\right)^{1/4} \tag{9.42}$$

式中，σ^* 是斯捷番 ~ 波尔兹曼常数，ε 为飞行器表面黑度系数，可取 $\varepsilon = 0.9$。

从式(9.39) 易知，临界点的最大热流量，出现在 $\rho^{\frac{1}{2}} v^3$ 取最大值时，因此把式(9.32) 代入其中，再对 ρ 求导数，令结果为零，可得

$$\rho^{**} = -\frac{\beta \sin\theta_2}{3\sigma} \tag{9.43}$$

可见，临界点热流量最大值出现在 ρ 取 ρ^{**} 值时，把式(9.43) 代入式(9.32)，求得对应的速度是

$$v_{\dot{Q}_{\max}} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{6} - \frac{\sigma \rho_2}{2\beta \sin\theta_2}\right) \tag{9.44}$$

而最大热流量则可由式(9.39) 求得

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3\sqrt{-\frac{\beta\sin\theta_2}{3\sigma}}\exp(-\frac{1}{2}+\frac{\rho_2}{2\rho^{**}}) \tag{9.45}$$

如若认为 $\rho_2 << \rho^{**}$，便有

$$v_{\dot{Q}_{\max}} = v_2\exp(-\frac{1}{6}) \approx 0.85v_2 \tag{9.46}$$

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3\sqrt{-\frac{\beta\sin\theta_2}{3\sigma e}} \tag{9.47}$$

上式中，e 是自然对数的底。可知，为使最大热流量减小，应尽量减小初始轨道倾角 θ_2(绝对值)，并最大限度地提高弹道参数(提高单位质量的迎面阻力)，比较式(9.46) 和式(9.37)，显 见临界点最大热流量先于最大过载出现。

如把式(9.32) 代入式(9.41)，再由式(9.29) 将 dt 变换成 dv 的表达式，积分后还可求得返回过程所吸收的气动加热的总量

$$Q = 0.25C_F\frac{S}{\sigma}v_2^2\left\{1 - \exp[\frac{\sigma(\rho-\rho_2)}{\beta\sin\theta_2}]\right\} \tag{9.48}$$

可见，为减小总热量 Q，应尽可能增大弹道参数 σ 和增大初始轨道倾角 θ_2(绝对值)，后一条件与减小临界点最大热流量是矛盾的。

对于弹道式返回，为减小最大过载值和最大热流量，惟一可以控制的量就是再入角 θ_2，无其他控制可能，因此初始参数的变化，飞行器外形的误差等都会造成落点误差。其落点散布椭圆的长轴是沿着飞行方向(纵向)的，约为数百公里，其短轴则沿速度的垂直方向(横向)，也有百余公里，这种落点的低精度是弹道式返回的主要缺点之一。

9.5.2　弹道 - 升力式返回

弹道式返回的缺点，如落点精度低、过载和气动加热大等，可用给飞行器增加升力来克服，当升阻比(或气动品质) $k = 0.2 \sim 0.3$ 时，已有很大的改进。这种小气动品质的返回飞行器，可创造载人的条件，常被应用于载人飞船。

a. 小气动品质返回飞行器的控制

小气动品质返回飞行器的轨道控制，是通过改变飞行器的升阻比来实现的。控制滚转角是一种实现改变升阻比的方法。图 9.6 说明了它的原理，压心是空气动力合力的作用点，该处有空气动力 $\boldsymbol{F}$，它被分解为沿速度方向的阻力 $\boldsymbol{D}$ 和垂直于它的升力 $\boldsymbol{L}$，在平衡状态下气动力 $\boldsymbol{F}$ 还应通过质心，它与重力 $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ 及惯性力构成平衡力系，且全部均处于飞行器的对称平面中。由于各种力都通过质心，对质心不存在任何方向的力矩，称此时速度和纵轴间的夹角为平衡攻角，以 α_T 表示。当

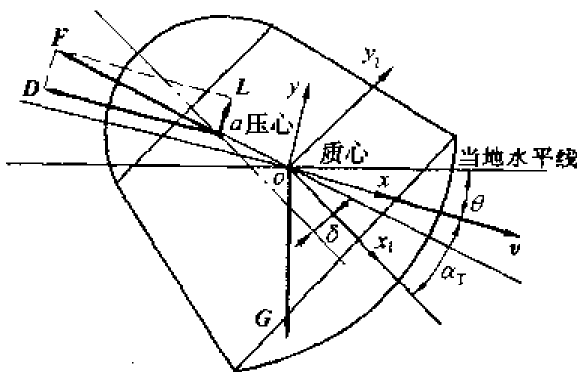


图 9.6　小气动品质飞行器

攻角大于(或小于)α_T时,升力 L 变大(或小),F 不再通过质心,它相对质心的力矩是使 α 的值趋向与 α_T 相等。因此,我们说这种飞行器是俯仰稳定的(或静安定的),同理,它在侧滑方向也是静安定的。

然而,如果飞行器纵平面对纵向运动平面具有初始的滚转角 γ,则其在纵向运动平面中的升力成为 $L\cos\gamma$,而有效的升阻比变为

$$K_{ef} = K\cos\gamma \tag{9.49}$$

应用这个原理,通过改变 γ 角的大小,改变升力 $L\cos\gamma$ 的数值,可以达到调整纵向飞行距离的目的。

与此同时,气动力还出现了侧向分量 $L\sin\gamma$,它与水平面重合,在该力的作用下,能使返回飞行器相对初始纵平面做侧向机动。这样,虽只有不太大的升力,却足够用来提高落点精度,以及减小气动加热和过载。如果不需要侧向气动力,或应调节它的大小,可以让返回飞行器以相同的滚转角向左、右两侧转动,或按要求变更它们的大小和偏转的时间。

这种利用滚转角同时控制返回飞行器纵向与横向位移的办法,又被称为返回轨道的滚转单通道控制方法。诚然,这种控制方法会引起纵向与横向位移的耦合,但它却非常简单,省去了第二个控制通道,应用十分广泛。

一般取 $\alpha_T = -30° \sim -20°, \theta_2 = -3° \sim -1°, K = 0.2 \sim 0.3, \gamma_0 = 20° \sim 30°$,可实现 $n_{x\max} \leq 3.5$ 的返回飞行。当气动品质提高时,最大过载还要下降,这是因为返回轨道不像弹道式返回那样陡的缘故。同样的原因,使临界点最高温度也下降了约 300 ~ 400℃,虽然总热量因返回飞行时间增长而增大了$(60 \sim 100) \times 10^6\ \mathrm{J/m^2}$。

为控制滚转角,常在返回飞行器上设置反推力控制装置,它将产生一绕滚转轴的力矩,并维持所需 γ 角的数值。苏联的“联盟”号飞船滚转力矩是绕速度施加的,因此,反作用推力器的安装方向应相对纵对称轴转过一平衡攻角 α_T 的数值。然而,美国“阿波罗”飞船的推力器却垂直于纵对称轴安装,它在产生滚转角的同时,也形成偏航运动。后者要靠飞船的静安定特性纠正并阻尼下来。

除了利用滚转角改变 K_{ef} 以控制飞船飞行的方法之外,还可利用改变攻角 α 达到这一目的。如图9.7所示,当 α 角改变时,升力和阻力系数将同时改变,因而也改变了气动品质 K。改变攻角可借助于反作用发动机产生控制力矩克服气动力矩实现,也可靠变更质心位置来控制,还可以利用各种气动操纵装置完成。

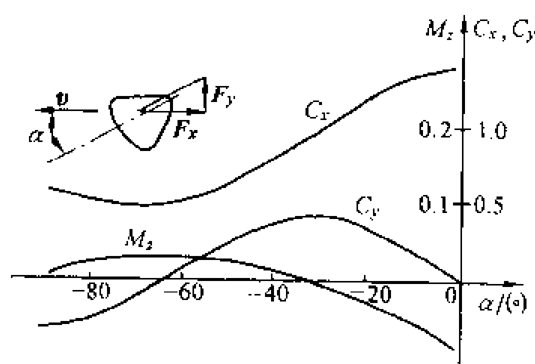


图 9.7　攻角与气动特性的关系

还有一种改变阻力系数 C_x 以调节 K 值的方法,例如在飞行过程中张开阻力板或类似装置。控制效果更佳的办法是综合采用上述各种控制方案,既采用攻角 α 控制方案,又应用滚转角 γ 控制。

b.　小气动品质返回飞行器的过载及加热

对于常值小气动品质返回飞行器进行过载及加热近似分析时,还要在弹道式飞行器

假设的基础上,进一步假设由于有了升力,轨道抬高,导致出现过载的最大值时,返回飞行器的速度变化并不十分激烈(自卫星轨道返回)。因此离心力与重力差不多相互抵消。

$$\left(\frac{mv^2}{r} - mg\right)\cos\theta \approx 0 \tag{9.50}$$

因此,若不计 P_θ,式(9.18) 成为

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma K \frac{\rho v}{2} \tag{9.51}$$

上式与式(9.22) 相除,考虑到式(9.27),并认为 $|\theta| \leq 5°$ 因而 $\sin\theta = \theta$,得

$$\theta \frac{d\theta}{dH} = \sigma K \frac{\rho_0}{2} \exp(-\beta H)$$

积分并应用式(9.27) 后,得

$$\rho = \rho_2 - \frac{\beta}{\sigma K}(\theta^2 - \theta_2^2) \tag{9.52}$$

再以式(9.29) 除式(9.51),所得方程式积分后,求得飞行速度

$$v = v_2 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_2}{K}\right) \tag{9.53}$$

或

$$\theta = \theta_2 + K\ln\frac{v_2}{v} \tag{9.54}$$

由式(9.24) ~ 式(9.26) 易知,过载 n_x,n_y 和 n 都与 $\frac{\rho v^2}{2}$ 成正比,只当该量为最大时过载才为最大,将式(9.52) 和式(9.53) 代入 $\frac{1}{2}\rho v^2$,对 θ 求导数,并令结果为零,可得

$$\theta^2 - K\theta - \left(\theta_2^2 + \frac{\sigma K}{\beta}\rho_2\right) = 0$$

因进入点大气密度 ρ_2 很小,可以略去,由上式解得

$$\theta^* = \frac{K}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}}\right) \tag{9.55}$$

这就是过载 n 达最大值时对应的轨道倾角,把它代入式(9.52) 和式(9.53),得 n_{max} 对应的密度和速度

$$\rho^* = \rho_2 - \frac{\beta K}{2\sigma}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}}\right) \tag{9.56}$$

$$v^* = v_2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}}\right) + \frac{\theta_2}{K}\right] \tag{9.57}$$

把式(9.56) 和式(9.57) 代入式(9.26),得

$$n_{max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0}\left[\rho_2 - \frac{\beta K}{2\sigma}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}}\right)\right]\exp\left[-\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}}\right) + \frac{2\theta_2}{K}\right]\sqrt{1 + K^2} \tag{9.58}$$

为了能看清 K 与 n_{max} 的关系,设 $|\theta_2|$ 为小量,因此由式(9.55) 求出的 θ^* 角是

$$\theta^* = 0 \tag{9.59}$$

和

$$\theta^* = K \tag{9.60}$$

其中 $\theta^* = 0$，是对应于 $C_y > 0$ 的情况的，这一点可由式(9.18)得知，因 θ 角由进入大气时的负值($\theta = \theta_2 < 0°$)，只有当 $C_y > 0(K > 0)$，才能使 θ 朝正方向变化，在某一时刻出现 $\theta = 0°$，此时飞行器的速度与当地水平线重合，此后，返回飞行器的轨道又开始上升(称为返回飞行器的弹跳)(图 9.8)。若把式(9.59)代入式(9.52)和式(9.53)，便有

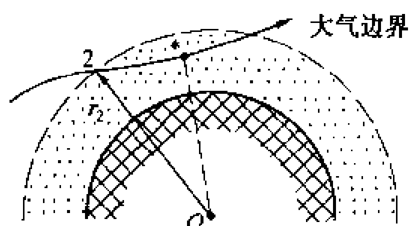


图 9.8 飞行器的弹跳

$$\rho^* = \rho_2 + \frac{\beta}{\sigma K}\theta_2^2 \tag{9.61}$$

$$v^* = v_2 \exp(\frac{\theta_2}{K}) \tag{9.62}$$

由式(9.26)，求得

$$n_{\max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0}(\rho_2 + \frac{\beta}{\sigma K}\theta_2^2)\exp(\frac{2\theta_2}{K})\sqrt{1 + K^2} \tag{9.63}$$

由于 ρ_2 很小，则上式略去此量后，成为

$$n_{\max} = \frac{\beta v_2^2 \theta_2^2}{2g_0 K}\exp(\frac{2\theta_2}{K})\sqrt{1 + \frac{1}{K^2}} \tag{9.64}$$

显见，K 增大时，$n_{\max}$ 减小了。

当 $\theta^* = K$ 时，应有 $C_y < 0$，因只有这种情况，θ 角才能从较小的 θ_2 值越来越小，而达到 $\theta^* = K$，因此，θ 一直为负值。返回飞行轨道较陡，此时利用式(9.58)并取上面的符号，得

$$n_{\max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0}(\rho_2 - \frac{\beta K}{\sigma})\exp(\frac{2\theta_2}{K} - 2)\sqrt{1 + K^2} \tag{9.65}$$

当 $|\theta_2| << |K|$，且略去 ρ_2 时，得

$$n_{\max} = -\frac{\beta v_2^2}{2g_0 e^2} K\sqrt{1 + K^2} \tag{9.66}$$

易知，$n_{\max}$ 将随 K 的增大而增加，这恰与前一情况相反。

前面分析了 $|\theta_2|$ 为小角度时，过载随 K 的变化趋势，再考察 $|\theta_2|$ 为较大值的情况($5° \le |\theta_2| \le 90°$)，显然 $n_{\max}$ 出现在 ρv^2 为最大值的瞬间，因此对 ρv^2 取导数，再令其为零，得

$$2\frac{\mathrm{d}v^*}{v^*} + \frac{\mathrm{d}\rho^*}{\rho^*} = 0$$

积分后，有

$$\rho^* v^{*2} = \rho_2 v_2^2 \tag{9.67}$$

因此，由式(9.26)，求得最大过载是

$$n_{\max} = \frac{\sigma}{2g_0}\rho_2 v_2^2 \sqrt{1 + K^2} \tag{9.68}$$

这就是说，当 $|\theta_2|$ 为较大值时，$n_{\max}$ 将随 K 的增大而增大。

综上所述，为使最大过载 $n_{\max}$ 随 K 的增大而减小，只能采用小的大气进入轨道倾角，即 $|\theta_2|$ 应取小值。计算表明，在 K 达到 1.0 之前，它对减小的作用最好，K 超过 1.0 之后，影响逐渐减弱。

由式(9.39) 易知，临界点最大热流量应在 $\rho^{1/2}v^3$ 达极大值时发生。重复前面的推导过程，把式(9.52) 和式(9.53) 代入 $\rho^{1/2}v^3$，并对 θ 取导数，令所得结果为零，略去 ρ_2 后，得

$$\theta^2 - \frac{K\theta}{3} - \theta_2^2 = 0$$

当 $|\theta_2|$ 为小角度时，由上式可解得最大临界点热流量出现的角度为

$$\theta^{**} = 0 \tag{9.69}$$

和

$$\theta^{**} = \frac{K}{3} \tag{9.70}$$

和前面一样，$\theta^{**} = 0$ 出现于 $C_y > 0$ 的情况，它也是具有弹跳的飞行(图 9.8)，且由式(9.59) 可知最大过载和最大临界点热流量同时发生，临界点最大热流量，可把式(9.69) 代入式(9.52) 和式(9.53)，再代入式(9.39) 求得(设 ρ_2 很小而略去)。

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3|\theta_2|\left(\frac{\beta}{\sigma K}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{3\theta_2}{K}\right) \tag{9.71}$$

可见，临界点最大热流量随 K 的增大而减小。

$\theta^{**} = \dfrac{K}{3}$ 是当 $C_y < 0$ 时，最大临界点热流量对应的轨道倾角，类似地可求得

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3\left[\frac{\beta}{\sigma K}\left(\theta_2^2 - \frac{K^2}{9}\right)\right]^{1/2}\exp\left(\frac{3\theta_2 - K}{K}\right) \tag{9.72}$$

当 K 较大而 $|\theta_2|$ 较小时

$$\dot{Q}_{\max} = \frac{kv_2^3}{3e}\left(-\frac{K\beta}{\sigma}\right)^{1/2} \tag{9.73}$$

可见，近似地说，$\dot{Q}_{\max}$ 与进入大气时的 θ_2 角无关，却随 K 的增加而增大。

即使不太大的气动品质，返回飞行器在大气中飞行的距离也比弹道式返回远很多。固定气动品质返回飞行器最重要的特点是落点精度不高，纵向约有数百公里误差，而横向也有百余公里误差。采用可变气动品质，特别是利用滚转单通道控制，将大大提高落点精度，纵向可高达20 ~ 30 km。对于可变品质的飞行器，其过载和气动加热仍用上面的方式计算，但要以 K_{ef} 代替式中的 K。

9.5.3　进入走廊与气动过载特性

a. 进入走廊

从上述分析，显见 θ_2 的大小对返回的特性影响是十分巨大的。θ_2 的绝对值过大，不仅使最大过载 $n_{x\max}$ 超过了容许值，还使飞行器临界点最大热流量变大。因此，由 $n_{x\max}$ 及 $\dot{Q}_{\max}$ 的限制决定了最大允许的 $|\theta_2|_{\max}$。

然而，是否 θ_2 的绝对值越小越好呢?答案是否定的。当 $|\theta_2|$ 过小，飞行器有时不能进入大气层的稠密区域，速度无法显著减小，会再次冲出大气(见图9.8)，因此，$|\theta_2|$ 的最小

值是保证不发生这种现象的 $|\theta_2|_{min}$。

称 $|\theta_2|_{max}$ 和 $|\theta_2|_{min}$ 之差为进入走廊，以 $|\theta_2|_{max}$ 和 $|\theta_2|_{min}$ 进入大气的轨道构成了进入走廊的边界。

为定量描述进入走廊的宽窄，用 $|\theta_2|_{max}$ 和 $|\theta_2|_{min}$ 角与进入时的初始速度 v_2 和大气半径 r_2，建立两个假想无大气时的椭圆轨道，它们的近心点半径(或近地点高度)之差记为 ΔH_n，则可以用来定量地表示进入走廊的宽窄，应用起来也比较方便，图 9.9 示出了这种进入走廊。由于近心点是假想椭圆轨道的，因此允许它进入中心引力体表面之下。进入走廊的宽度与目标引力体的引力常数 μ_B，其周围的大气稠密程度以及再入飞行器的最大许用过载有着直接的联系。

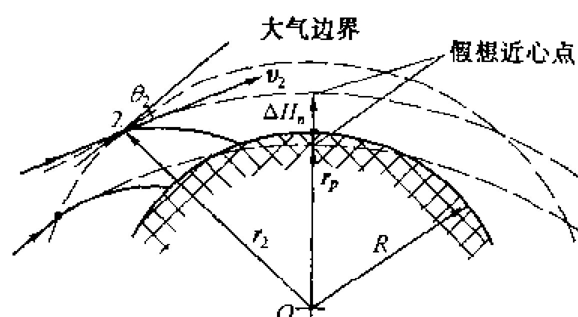


图 9.9　进入走廊

当 n_{xmax} 确定之后，进入中心引力体的进入走廊宽度就可以确定了，表 9.1 和表 9.2 分别给出的是弹道式和弹道－升力式再入飞行器在某些行星的进入走廊。

表 9.1　弹道式飞行器的进入走廊

目标行星	进入走廊 ΔH_n/km			
	$n_{x_{max}}$			
	5	10	20	40
地　球	0	11.3	32.2	113
金　星	0	12.9	37	129
火　星	340	645	2 000	3 540
木　星	0	0	0	16.1

表 9.2　弹道－升力式飞行器的进入走廊

目标行星	进入走廊 ΔH_n/km								
	n_{max}								
	5			10			20		
	K								
	0	1	1 可调	0	1	1 可调	0	1	1 可调
地　球	0	43.5	55	11.3	82	105	32.2	161	210
金　星	0	43.5	58	12.9	84	113	37	169	226
火　星	340	483	595	645	885	1 160	2 000	1 900	2 800
木　星	0	55	67.6	0	84	113	0	145	193

由表可见，向木星降落的进入走廊多数情况下为最狭窄，向火星降落时进入走廊最宽。这是因为火星的大气比较稀薄，木星的大气比较稠密且引力也比较大的缘故。由于 K

值的出现，同样容许过载的情况下，进入走廊大大加宽。

b. 返回飞行器的气动过载特性

返回飞行器在大气中飞行时，过载是在不断地变化着的，不同的返回飞行器，不同的再入状态，其变化规律也是各不相同的，如峰值的大小，持续的时间，出现的次数等。图 9.10 给出的是不同初始再入角 θ_2，弹道式返回飞行器过载随时间的变化规律，由图可见，$|\theta_2|$ 越小，最大过载的数值就越小时，它的出现时刻也越迟。对于载人返回而言，只当 $|\theta_2| \leq 2°$ 时才有可能。一般而言，弹道式返回，无论在什么初始条件下，n_x 的最大值都会超过 7（$n_{x\max} > 7$），而 $n_x(t)$ 大于 5 的时间超过60 ~ 70 s。当 θ_2 绝对值减小时，飞行时间加长，气动阻力强度减小，因而 $n_{x\max}$ 下降，反之则 $n_{x\max}$ 增加。事实上，大气飞行段的初始条件，除了 θ_2 之外，还有 v_2 和 r_2，但 r_2 为规定的数值，v_2 虽可变动但变化范围不大，因此只有 θ_2 是影响最大的参量。

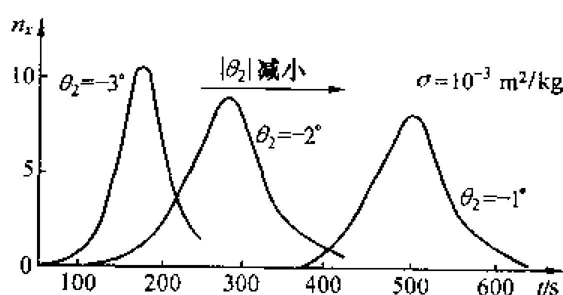


图 9.10　$|\theta_2|$ 的影响

图 9.11 给出了具有不同气动品质的返回式飞行器的最大过载曲线，从图中可以很清楚地看出最大过载与进入时的状态 v_2、θ_2 及气动品质 K 间的关系，可见当 $K = 0.25$ 时，若 $\theta_2 = -3° \sim -1°$，则最大过载 $n_{x\max}$ 不会超过 3.5；当 $K = 0.5$ 时，$n_{x\max}$ 将不超过 2.5。当 $|\theta_2|$ 增大 时，$n_{x\max}$ 会迅速升高。

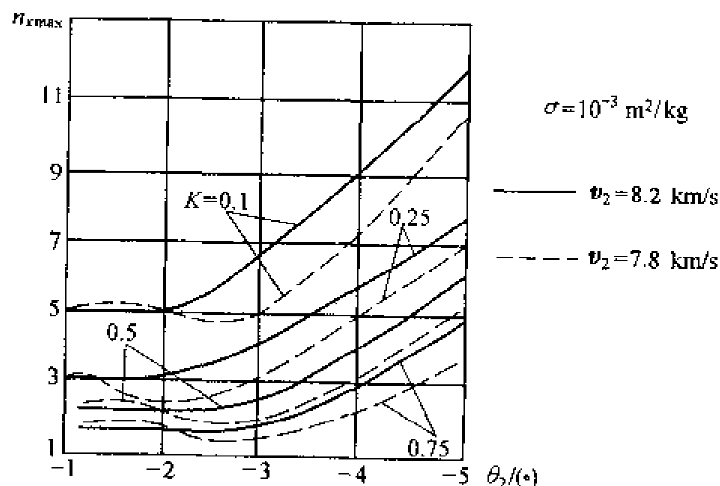


图 9.11　过载与再入角的关系

图 9.12 则给出了具有不同气动品质的返回式飞行器的过载随时间变化的曲线，从图 9.12 中可以看出，进入角 θ_2 与气动品质 K 对过载特性的影响，如峰值的大小，出现的次数，在一定幅值之上持续的时间等。随着气动品质 K 增加，最大过载推迟出现，峰值降低，返回飞行时间显著增加，K 大于 0.25 之后，运动呈振动性，过载 n_x 有若干峰值。

当返回飞行器载人时，应考虑宇航员乃至普通乘客所能经受的最大过载和最大过载的作用方向及作用时间，由于人体结构特点，对过载的承受能力是有方向性的。图 9.13 表示允许过载、作用时间和作用方向间的关系，其中 ν 是过载作用方向与人体纵轴线的夹角。可见，过载越大，人类能够承受的时间就越小；过载的方向越接近于人体的纵轴，能够

承受的过载就越小。在设计返回飞行器乘员座位时，应该充分考虑这些因素。

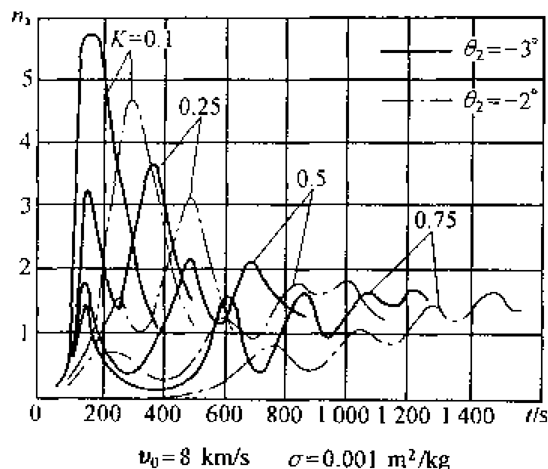


图 9.12　过载与升阻比的关系

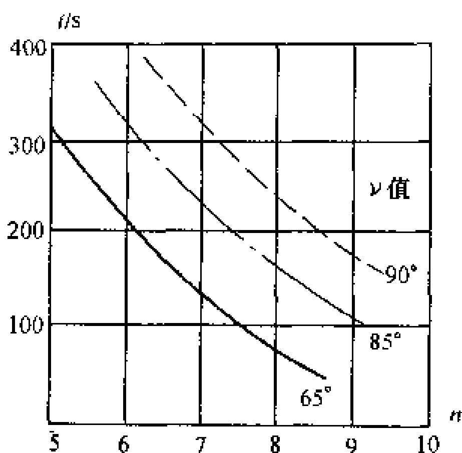


图 9.13　人体过载承受时间曲线

9.5.4　多次穿过大气的飞行

当飞行器返回时，再入走廊宽度与它进入大气时的初始条件（v_2 和 θ_2），以及飞行器的气动品质等有密切关系，其中尤以 v_2 影响最大，当飞行器速度接近第二宇宙速度或更大时，常使再入走廊窄到只有几公里或减至零，这给飞行器的控制带来极大困难，从其他星球飞回地球或向其他行星进入的飞行就会遇到这种情况。

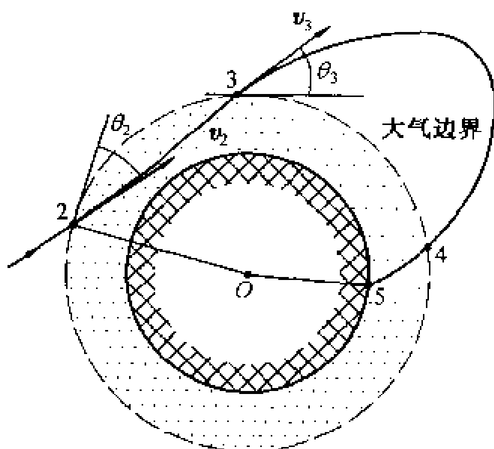


图 9.14　二次穿越

解决的办法有下面几种。可以利用减速发动机使进入大气时的速度减至第一宇宙速度左右，但这种方法将大大增加飞行器的重量，甚至要求使用核燃料。另一种办法是提高空间飞行器的气动品质，例如提到1.0 ~ 1.2，高于此值对拓宽再入走廊已无更大的实际效果。然而，为此需采用特殊设计的飞行器外形（如考虑增设翼面等），这将大大增加结构和防热材料的重量。第三种办法是采用完善的控制方法，适应狭窄进入走廊的控制要求，这也会导致重量的增加。第四种办法是多次穿过大气层，利用大气的阻力减速，如图 9.14 所示，空间飞行器首先在 2 点进入大气，随后的飞行分成三段：2 ~ 3 为第一段，是大气减速飞行段；3 ~ 4 为大气层外飞行段；4 ~ 5 是第二次进入大气段，并最后着陆。

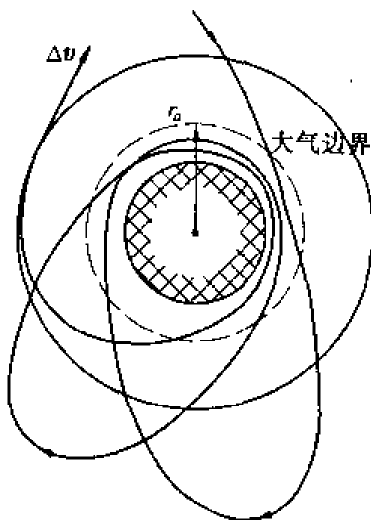


图 9.15　多次穿越

其中第一段，即 2 ~ 3 段最为关键，因自 3 点飞出时速度的大小和方向，决定了 3 ~ 4 和 4 ~ 5 段的

飞行。据计算，若速度误差为 1 m/s，角度误差为 0.01°，将会造成 25 km 的落点偏差。而 4 ~ 5 段机动的能力大约在 ± 400 km 左右，这就导致对第一段飞行控制精度要求的提高，自月球返回地球可以采用这种飞行方案，"阿波罗"飞船就采用了这种方案。

当空间飞行器以接近或大于第二宇宙速度进入行星大气时，往往需两次以上地穿过大气，如图 9.15 所示。空间飞行器三次穿过大气层，第一次进入，减速为大椭圆轨道，第二、三次进入，气动阻力将轨道逐渐摄动为小椭圆，然后以较小的 Δv 进入绕中心引力体的圆轨道，或在此运行，或等待机会进入大气，并返回行星表面。

第二篇

空间飞行器姿态动力学

第十章 空间飞行器姿态运动学

空间飞行器姿态运动学是研究它在轨道运动中绕有关轴转动的角度和角速度变化规律的学科。

10.1 常用的坐标系

惯性坐标系 动力学的最基本定律是牛顿三大定理，这些定理是描述物体在惯性空间的运动规律。所谓惯性空间，是指静止或以等速直线运动的空间。然而静止和运动本来都是一种相对的概念。例如，人在车中是静止的，树在大地上是不动的，但如果站在站台上看车子或跳到空间看地球，车中的人和种在地上的树也都是运动的，所以动和静是一种相对概念，惯性空间也就是相对的了。在工程实践中，我们可以取具有一定加速度的空间作为惯性空间，只要加速度足够小，与研究对象相比可以忽略，且不影响问题真实解的精度要求即可。例如，当我们研究地球卫星时可以取地心惯性坐标系作为参考系，而研究星际飞行时又可取日心惯性坐标系为基础，在研究某些问题时甚至还可以选择轨道坐标系为惯性坐标系。

地心惯性坐标系 $EX_IY_IZ_I$ 原点取在地心，EZ_I 沿地球自转轴指向北方，EX_I 指向春分点，EY_I 与另两轴构成右旋正交系（图 10.1），显然 EX_IY_I 是赤道平面。

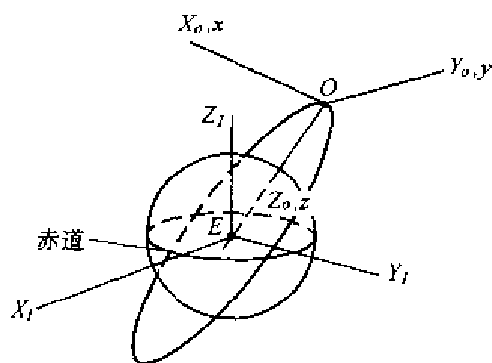


图 10.1 地心惯性坐标系和轨道坐标系

轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 这是由轨道平面和地心确定的坐标系。已知轨道平面应该通过地心，所以轨道速度和空间飞行器到地心的连线必然处于轨道平面之上。假如我们取空间飞行器质心为坐标系原点 O，由 O 到地心 E 的连线为 OZ_o 轴指向地心为正，在轨道平面指向前方的是 OX_o 轴，OY_o 和前两轴构成右旋正交系（图 10.1）。显然 OY_o 是轨道平面的法线，而对于圆轨道 OX_o 是它的切线。

空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 本坐标系与空间飞行器固联，如果空间飞行器不旋转，在正常的理想稳定状态，它是与 $OX_oY_oZ_o$ 同名轴相重合的。通常空间飞行器有纵轴和纵对称面，此时 Ox 将与纵对称轴重合指向前进方向，Oy 垂直于纵对称面，Oz 与它们互补成为右旋正交系。空间飞行器在受到扰动，或在控制力矩的作用下会产生角运动，使 $Oxyz$ 坐标系不再与 $OX_oY_oZ_o$ 重合。这时绕 Ox 轴的转角被称为**滚转角**，该轴就是滚动轴；绕 Oy 和 Oz 轴的转角分别是**俯仰角**和**偏航角**，而 Oy 和 Oz 轴也就称为俯仰轴和偏航轴。滚转角、俯仰角和偏航角统称为**姿态角**，而空间飞行器的角运动就是**姿态运动**。

空间飞行器体固联系 $Ox_by_bz_b$ 又简称为体固联系，当飞行器不做自旋运动时，体固联系与空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 是完全一致的。然而，空间飞行器常围绕 $Oxyz$ 某一轴做自旋运动，以增加指向的稳定性或抗翻滚能力，这样 $Ox_by_bz_b$ 与 $Oxyz$ 将不再重合，而是周期性地重叠到一起。所以，$Ox_by_bz_b$ 随着 $Oxyz$ 坐标系相对 $OZ_oY_oZ_o$ 轨道系进行姿态运动（俯仰、偏航和滚转），同时还相对 $Oxyz$ 做自旋运动，自旋轴可以是 $Oxyz$ 中的任何一坐标轴，但本书中常常指定 Oy 为自旋轴。

10.2 欧拉角和坐标变换矩阵

欧拉角 欧拉角是说明空间飞行器与轨道坐标系之间，即 $Oxyz$ 与 $OZ_oY_oZ_o$ 之间角方位的关系的。正常情况下飞行器坐标系 $Oxyz$ 与轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 同名轴重合，且指向一致，但在干扰力矩或控制力矩作用下，两者将不一致，有时为了某项任务的方便还会有意地让 $Oxyz$ 坐标系与 $OX_oY_oZ_o$ 偏离。在上述两坐标系不一致时，为了确切说明两者的指向关系，常常应用相继旋转的姿态角定义，这时姿态角又常被称为**欧拉角**。

我们知道，如果把角速度视为矢量，则绕两相交轴旋转运动的合成运动的角速度，可以按几何相加的方法由分别绕两轴的角速度求得。然而角度却不是矢量，不能利用类似矢量求和的方法去求其和角度，而且最终结果不仅取决于绕两轴的角度大小，而且与旋转顺序有关。因此，用欧拉角描述旋转运动时，我们应该考虑绕三轴旋转的顺序。

如果从 $Oxyz$ 和 $OX_oY_oZ_o$ 相互重合的位置出发，令 $Oxyz$ 坐标系顺序地绕不同轴旋转，最后达到 $Oxyz$ 的新位置，具体地有如下顺序，先绕 OX_o 轴转过 φ 角得 $Ox_1y_1z_1$，再绕 Oy_1 转 ϑ 角得 $Ox_2y_2z_2$，最后绕 Oz_2 转过 ψ 角至 $Oxyz$ 坐标系的新位置。上述过程可简单地写为：

$$x(\varphi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow z(\psi)$$

那么，从轴的旋转顺序排列数目考虑，上述坐标系的变换过程共有 12 种。它们是

$$x(\varphi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow z(\psi),\ x(\varphi)\rightarrow z(\psi)\rightarrow y(\vartheta)$$
$$x(\varphi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow x(\psi),\ x(\varphi)\rightarrow z(\psi)\rightarrow x(\vartheta)$$
$$y(\vartheta)\rightarrow z(\psi)\rightarrow x(\varphi),\ y(\vartheta)\rightarrow x(\varphi)\rightarrow z(\psi)$$
$$y(\vartheta)\rightarrow z(\psi)\rightarrow y(\varphi),\ y(\vartheta)\rightarrow x(\varphi)\rightarrow y(\psi)$$
$$z(\psi)\rightarrow x(\varphi)\rightarrow y(\vartheta),\ z(\psi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow x(\varphi)$$
$$z(\psi)\rightarrow x(\varphi)\rightarrow z(\vartheta),\ z(\psi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow z(\varphi)$$

坐标变换矩阵 以 $z(\psi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow x(\varphi)$ 的变换顺序为例，说明这一过程的坐标变换矩阵和应用坐标变换矩阵进行姿态角和姿态角速度变换的原理。图 10.2 说明了这个变换的过程，先是绕 OZ_o 轴以角速度 $\dot{\psi}$ 转过 ψ 角，得 $Ox_1y_1z_1$ 坐标系；再绕 Oy_1 以角速度 $\dot{\vartheta}$ 转过 ϑ 角，得 $Ox_2y_2z_2$ 坐标系；最后绕 Ox_2 以角速度 $\dot{\varphi}$ 转过 φ 角，得到体坐标系 $Oxyz$。

上述过程中，由 $OX_oY_oZ_o$ 到 $Ox_1y_1z_1$ 的变换矩阵，可推导如下（图 10.3）。设在空间有某一点 P 它在 $OX_oY_oZ_o$ 中的坐标是 X_o、Y_o 和 Z_o，而在 $Ox_1y_1z_1$ 中是 x_1、y_1 和 z_1。显然有 $z_1=z_o$，而 P 向 OX_oY_o 平面的投影点是 P_1。利用图 10.2 的几何关系可得

$$x_1 = X_o\cos\psi + Y_o\sin\psi$$
$$y_1 = -X_o\sin\psi + Y_o\cos\psi$$

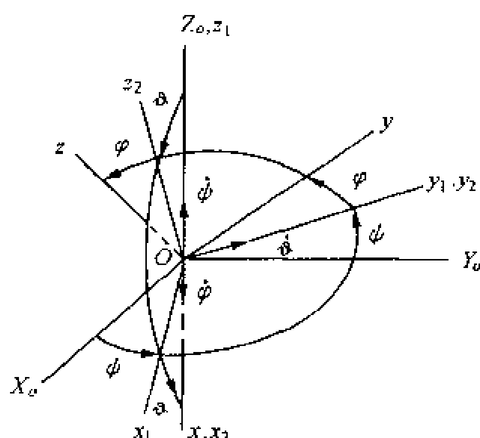


图 10.2　自 $X_oY_oZ_o$ 向 $Oxyz$ 变换的过程

这样就可以求得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}$$

如果令 $\underline{X}_1 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^{\mathrm{T}}$ 和 $\underline{X}_0 = [X_o \quad Y_o \quad Z_o]^{\mathrm{T}}$，而以 $\underline{C}_{10}$ 表示由 $OX_oY_oZ_o$ 到 $Ox_1y_1z_1$ 的坐标变换矩阵，其前后两下标分别表示变换后和变换前的坐标系。上式可改写为

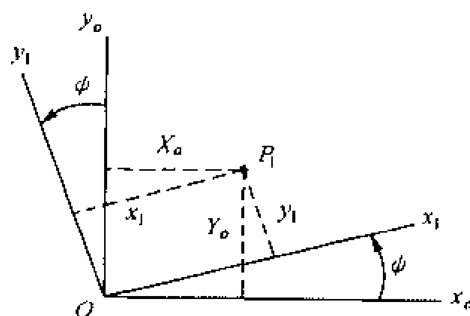


图 10.3　由 $OX_oY_oZ_o$ 到 xyz 变换矩阵的推导

$$\underline{X}_1 = \underline{C}_{10}\underline{X}_o \tag{10.1}$$

其中

$$\underline{C}_{10} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

同理，如果以 x_2、y_2 和 z_2 表示 P 在 $Ox_2y_2z_2$ 中的坐标，并以 $\underline{X}_2 = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^{\mathrm{T}}$ 表示坐标的列阵，$\underline{C}_{21}$ 表示从 $Ox_1y_1z_1$ 向 $Ox_2y_2z_2$ 的坐标变换矩阵，还有

$$\underline{X}_2 = \underline{C}_{21}\underline{X}_1 \tag{10.3}$$

和

$$\underline{C}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

最后，以 x、y 和 z 表示 P 在 $Oxyz$ 中的坐标，并用 $\underline{X} = [x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}}$ 和 $\underline{C}_{x2}$ 表示 P 点坐标的列矩阵和从 $Ox_2y_2z_2$ 向 $Oxyz$ 的坐标变换矩阵，有

$$\underline{X} = \underline{C}_{x2}\underline{X}_2 \tag{10.5}$$

和

$$\underline{C}_{x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

如果以 $\underline{C}_{x0}$ 定义由 $OX_oY_oZ_o$ 到 $Oxyz$ 的坐标变换矩阵，显然应该有

$$\underline{X} = \underline{C}_{x0}\underline{X}_0 \tag{10.7}$$

的关系，而考虑到式(10.1)、式(10.3) 和式(10.5)，得

$$\underline{X} = \underline{C}_{x2}\underline{C}_{21}\underline{C}_{10}\underline{X}_0 \tag{10.8}$$

比较上两式，可求得 C_{x0}

$$\underline{C}_{x0} = \underline{C}_{x2}\underline{C}_{21}\underline{C}_{10} \tag{10.9}$$

把式(10.2)、式(10.4) 和式(10.6) 代入后，求得

$$\underline{C}_{x0} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta\sin\psi & -\sin\vartheta \\ -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\vartheta\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi & \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi & \cos\varphi\cos\vartheta \end{bmatrix} \tag{10.10}$$

前面以一个空间点 P 在不同坐标系中的坐标为例，导出了各系之间的坐标变换矩阵。然而坐标变换矩阵还可以做矢量在不同坐标系中分量间的变换，只要把各轴上的分量视为矢端点的坐标，就不难理解这个变换的实质。

在从 $OX_oY_oZ_o$ 向 $Oxyz$ 的转动过程中，是分别绕三轴以角速度 $\dot{\psi}$、$\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\varphi}$ 完成的，如前所述角速度可以视为矢量，其几何和(矢量和)就是合成运动的角速度。后者又可以在任意一个坐标系内分解成分量，不过我们应用最多的还是在 $Oxyz$ 体坐标系内的分量 ω_x、ω_y 和 ω_z。根据这个原理，把 $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\vartheta}$ 分别看成是某一角速度在 $Ox_2y_2z_2$ 坐标系中 Ox_2 和 Oy_2 轴的分量，而 $\dot{\psi}$ 是 $Ox_1y_1z_1$ 中 OZ_1 轴方向的分量(图 10.2)，那么 ω_x、ω_y 和 ω_z 应如下求得

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \underline{C}_{x2}\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{C}_{x2}\underline{C}_{21}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

将式(10.6) 和式(10.4) 代入上式，得

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

ω_x、ω_y 和 ω_z 是从轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 转到飞行器坐标系 $Oxyz$ 的角速度在 $Oxyz$ 中分量，其和的矢量 $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$ 称空间飞行器的姿态角速度，φ、ψ 和 ϑ 又称姿态角，它们描述了 $Oxyz$ 和 $OX_oY_oZ_o$ 之间的角速度和角度关系，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是 Ox，Oy，Oz 轴的单位矢量。

这里要说明的是，直角坐标系的坐标变换矩阵都是正交的，即它们的逆和转置相等，因此对于坐标变换矩阵 $\underline{C}_{ij}$ 有

$$\underline{C}_{ij} = (\underline{C}_{ji})^{-1} = \underline{C}_{ji}^{\mathrm{T}} \tag{10.13}$$

的关系。这里 $\underline{C}_{ij}$表示由j坐标系向i坐标系的变换矩阵，而 $\underline{C}_{ji}$ 则是由i系向j系的变换矩阵。两者本来是互为逆矩阵的关系，但有了式(10.13)，求逆的过程可以用简单的转置来代替，大大的节省了推导过程。

不过式(10.12)中的变换矩阵却不是正交的，因为从几何角度看 $\dot{\varphi}$、$\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\psi}$ 并不相互垂直，所以从 ω_x、ω_y 和ω_z 求 $\dot{\varphi}$、$\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\psi}$ 的过程不能简单地把中间的方阵转置来代替求逆，而应写成

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\vartheta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\vartheta\\ 0 & \cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{10.14}$$

并老老实实地计算方阵的逆，或由式(10.12)用其他方法求解 $\dot{\varphi}$、$\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\psi}$。经推导式(10.14)的逆是

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\vartheta\\ 0 & \cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\cos\vartheta}\begin{bmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi\\ 0 & \cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{10.15}$$

逆矩阵中出现了乘子 $1/\cos\vartheta$，这意味着当 $\vartheta=90°$ 时，矩阵奇异，式(10.15)无解，这正是应用欧拉角描述坐标变换的缺点。为了避免奇异的出现，可以采用四元数描述坐标变换的方法。

式(10.11)～式(10.13)处理了从 $OX_oY_oZ_o$ 到 $Oxyz$ 或反过来变换中的姿态角速度，然而 $OX_oY_oZ_o$ 坐标系是随着空间飞行器运动的，它沿 OY_o 轴的反方向绕地心惯性系以ω_0旋转。若考虑轨道坐标系的这种运动，应在飞行器原有角速度 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 中增加ω_0影响成分，成为相对地心惯性坐标系的姿态角速度。它在 $Oxyz$ 坐标系中的分量以ω_x^*，ω_y^* 和ω_z^*表示，应写为(与式(10.11)比较)

$$\begin{bmatrix}\omega_x^*\\ \omega_y^*\\ \omega_z^*\end{bmatrix}=\underline{C}_{x2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ 0\end{bmatrix}+\underline{C}_{x2}\,\underline{X}_{21}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}-\underline{C}_{x0}\begin{bmatrix}0\\ \omega_0\\ 0\end{bmatrix} \tag{10.16}$$

其中，ω_0是空间飞行器质心绕地心的轨道角速度，它与真近角θ有$\omega_0=\dot{\theta}$的关系。我们知道空间飞行器的轨道动量矩和半径满足 $\dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}=\dfrac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$，$r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$，由此得

$$\omega_0=\dot{\theta}=\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(1+e\cos\theta)^2 \tag{10.17a}$$

其中，p 是轨道半正焦弦，μ 是中心星体引力常数。如轨道为圆形，其半径 R 与p 相等，则

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \tag{10.17b}$$

若轨道为接近圆形，则由式(10.17a)还可求得

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}(1 + 2e\cos\theta) \tag{10.17c}$$

若把式(10.4)、式(10.6) 和式(10.10) 代入式(10.16),有

$$\begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\vartheta\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi \end{bmatrix}\omega_0 \tag{10.18}$$

反过来求 ω_x^*、ω_y^*、ω_z^* 和ω_0对 $\dot\varphi$、$\dot\vartheta$ 和 $\dot\psi$ 的关系时,可以用式(10.15)左乘式(10.18),得

$$\begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\vartheta}\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 & \cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} + \frac{1}{\cos\vartheta}\begin{bmatrix} \sin\psi \\ \cos\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\sin\psi \end{bmatrix}\omega_0 \tag{10.19}$$

式(10.18) 和式(10.19) 是空间飞行器相对惯性空间的姿态角速度 ω_x^*, ω_y^* 和ω_z^* 与 $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ 之间的关系。它和式(10.12) 与式(10.14) 的差别在于多了轨道角速度 ω_0。

坐标变换矩阵是欧拉角的三角函数,它们在微分方程中将使得微分方程式呈非线性,给求解带来不少麻烦。不过,当 $Oxyz$ 和 $OX_oY_oZ_o$ 两坐标系接近重合(如姿态控制系统工作在稳态工作点的附近),姿态角(欧拉角)是小量,可以认为 $\sin\alpha = \alpha$, $\cos\alpha = 1$(α 是任意姿态角),则略去二阶小量后式(10.10) 和式(10.18) 成为

$$\underline{C}_{x0} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\vartheta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \vartheta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} \tag{10.20}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi \\ 1 \\ -\varphi \end{bmatrix}\omega_0 \tag{10.21}$$

从上式还可移项求得

$$\begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi \\ 1 \\ -\varphi \end{bmatrix}\omega_0 \tag{10.22}$$

以上是以 $z(\psi)\to y(\vartheta)\to x(\varphi)$ 为例,研究了坐标变换矩阵和它的应用。表10.1中给出了12种变换顺序得到的坐标变换矩阵 $\underline{C}_{x0}$,表10.2是对应的姿态角速度变换矩阵。

如果不计轨道角速度,或者将轨道速度的影响另行考虑时,式(10.21)和式(10.22)还可以被写为

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{bmatrix} \tag{10.23}$$

表 10.1　12 种不同转动顺序的坐标变换矩阵

转动顺序	$\underline{C}_{x0}$ – 由 $OX_oY_oZ_o$ 向 $Oxyz$ 的坐标变换矩阵
$x(\varphi)\to y(\vartheta)\to z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta & \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi-\cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi)\to z(\psi)\to y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta & \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi-\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi-\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi)\to y(\vartheta)\to x(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\vartheta & \cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\vartheta & -\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi)\to z(\psi)\to x(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi-\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi+\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\psi & -\sin\vartheta\cos\psi\cos\varphi-\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to z(\psi)\to x(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta & \sin\psi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ -\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta+\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\vartheta+\sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta+\cos\varphi\sin\vartheta & -\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi\sin\vartheta+\cos\varphi\cos\vartheta \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to x(\varphi)\to z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta+\sin\psi\sin\varphi\sin\vartheta & \sin\psi\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta+\sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\psi\cos\vartheta+\cos\psi\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta+\cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\vartheta \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to z(\psi)\to y(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta-\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cos\psi\sin\vartheta-\sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta+\cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi\sin\vartheta+\cos\varphi\cos\vartheta \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to x(\varphi)\to y(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta-\sin\psi\cos\varphi\sin\vartheta & \sin\psi\sin\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta-\sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\psi\cos\vartheta+\cos\psi\cos\varphi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\vartheta+\cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta \end{matrix}$
$z(\psi)\to x(\varphi)\to y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta\cos\psi-\sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi & \cos\vartheta\sin\psi+\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\psi+\cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi & \sin\vartheta\sin\psi-\cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$
$z(\psi)\to y(\vartheta)\to x(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta\sin\psi & -\sin\vartheta \\ -\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\sin\vartheta\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi & \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi & \cos\varphi\cos\vartheta \end{matrix}$
$z(\psi)\to x(\varphi)\to z(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta\cos\psi-\sin\vartheta\cos\varphi\sin\psi & \cos\vartheta\sin\psi+\sin\vartheta\cos\varphi\cos\psi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\psi-\cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\vartheta\sin\psi+\cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi & \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi \end{matrix}$
$z(\psi)\to y(\vartheta)\to z(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta \end{matrix}$

表 10.2　12 种不同转动顺序的姿态角速度变换矩阵

转动顺序	由$(\dot{\varphi}\ \dot{\vartheta}\ \dot{\varphi})^{\mathrm{T}}$向$(\omega_x\ \omega_y\ \omega_z)^{\mathrm{T}}$的变换矩阵	由 ω_0 向$(\omega_x^*\ \omega_y^*\ \omega_z^*)^{\mathrm{T}}$的变换矩阵
$x(\varphi)\to y(\vartheta)\to z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi)\to z(\psi)\to y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta\cos\psi & 0 & -\sin\vartheta \\ -\sin\psi & 1 & 0 \\ \sin\vartheta\cos\psi & 0 & \cos\vartheta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi-\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\psi\cos\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi+\cos\vartheta\sin\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi)\to y(\vartheta)\to x(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta & 0 & 1 \\ \sin\psi\sin\vartheta & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi\sin\vartheta & -\sin\psi & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi)\to z(\psi)\to x(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\psi & 1 & 0 \\ -\cos\vartheta\sin\psi & 0 & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\psi & 0 & \cos\vartheta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin\psi\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\psi\cos\varphi+\cos\vartheta\sin\varphi \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to z(\psi)\to x(\varphi)$	$\begin{matrix} 1 & \sin\psi & 0 \\ 0 & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin\psi \\ -\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to x(\varphi)\to z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\varphi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin\psi\cos\varphi \\ -\cos\psi\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to z(\psi)\to y(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & -\sin\psi \\ 0 & \cos\psi & 0 \\ \sin\varphi & \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos\varphi\sin\psi \\ -\cos\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi \end{matrix}$
$y(\vartheta)\to x(\varphi)\to y(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi\sin\varphi \\ 0 & 1 & \cos\varphi \\ \sin\psi & 0 & -\cos\psi\cos\varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$
$z(\psi)\to x(\varphi)\to y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 & 1 & \sin\varphi \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos\vartheta\sin\psi-\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi \\ -\cos\varphi\cos\psi \\ -\sin\vartheta\sin\psi+\cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi \end{matrix}$
$z(\psi)\to y(\vartheta)\to x(\varphi)$	$\begin{matrix} 1 & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos\vartheta\cos\psi \\ -\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi \end{matrix}$
$z(\psi)\to x(\varphi)\to z(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 & 1 & \cos\varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos\vartheta\sin\psi-\sin\vartheta\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\vartheta\sin\psi-\cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \end{matrix}$
$z(\psi)\to y(\vartheta)\to z(\varphi)$	$\begin{matrix} 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ 1 & 0 & \cos\vartheta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi \\ -\sin\vartheta\sin\psi \end{matrix}$

这说明对于小角度的情况，坐标变换时的旋转顺序已不影响变换的结果，绕某轴的旋转速率便是飞行器坐标系同名轴的角速度。作为这一结论的延伸，还可以把依次的三个旋转角之和视为一个和角度矢量 $\boldsymbol{\Phi}$，它在 $Oxyz$ 坐标系各轴的分量，就是绕各轴的旋转角

$$\underline{\Phi} = (\varphi \quad \vartheta \quad \psi)^{\mathrm{T}} \tag{10.24}$$

那么式(10.20) 可以被写成

$$\underline{C}_{x0} = \underline{E} - \underline{\Phi}^{\times} \tag{10.25}$$

其中 $\underline{E}$ 为 3 阶单位阵，而式(10.23) 成为

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = (\underline{E} - \underline{\Phi}^{\times}) \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{10.26}$$

这个结论对于12种变换顺序都是正确的，读者可根据表10.1和表10.2的公式自行验证。

10.3　空间飞行器坐标系和体固联坐标系间的变换

前面详细研究了 $Oxyz$ 和 $OZ_oY_oZ_o$ 两坐标系之间的关系，本节再对 $Oxyz$ 和 $Ox_by_bz_b$ 两坐标系的变换关系做一简要说明。

空间飞行器可以绕 $Oxyz$ 中任意一轴旋转，但为了方便，本节只分析绕 Oy 轴旋转的情况。通常物体在旋转时，只有绕某一主惯性轴转动才有稳定的可能，而主惯性轴大多都是对称轴，因此我们所说的自旋轴，实际上应该是空间飞行器的惯性主轴，或是对称轴乃至轴对称轴。

假如 $Ox_by_bz_b$ 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕 Oy 旋转(图 10.4)，则由 $Oxyz$ 到 $Ox_by_bz_b$ 的坐标变换矩阵 $\underline{C}_{bx}$。

$$\underline{C}_{bx} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \nu_0) & 0 & -\sin(\Omega t + \nu_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Omega t + \nu_0) & 0 & \cos(\Omega t + \nu_0) \end{bmatrix} \tag{10.27}$$

其中，ν_0 是 $t = 0$ 时两坐标系之间的初始夹角，一般取为零值。

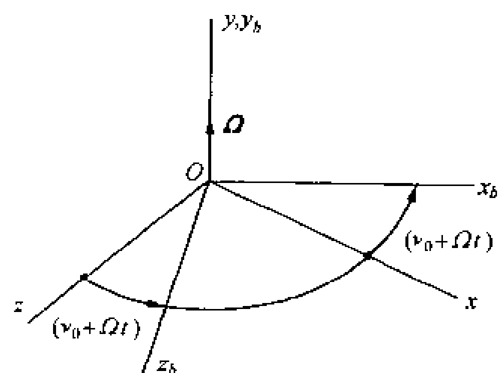


图 10.4　从 $Oxyz$ 到 $Ox_by_bz_b$ 的坐标变换

由于 $Ox_by_bz_b$ 固定在空间飞行器上，当飞行器上没有活动物体(航天员、晃动的液体、活动装置等)时，转动惯量是不变的，其分量矩阵是常值阵。当飞行器旋转时，惯量阵在 $Ox_by_bz_b$ 中仍保持常值，而在 $Oxyz$ 中却为时间的周期变量。如以 $\underline{J}_b$ 和 $\underline{J}$ 分别表示飞行器在 $Ox_by_bz_b$ 和 $Oxyz$ 中的转动惯量阵，按式(附 3.26) 和式(附 4.2) 式它们之间有

$$\underline{J} = \underline{C}_{xb}\ \underline{J}_b \underline{C}_{bx}$$

假如 $\underline{J}_b$ 是主惯量阵

$$\underline{J}_b = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}$$

则当初始角 $\nu_0 = 0$ 时，有

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x \cos^2 \Omega t + J_z \sin^2 \Omega t & 0 & (J_z - J_x) \cos \Omega t \sin \Omega t \\ 0 & J_y & 0 \\ (J_z - J_x) \cos \Omega t \sin \Omega t & 0 & J_x \sin^2 \Omega t + J_z \cos^2 \Omega t \end{bmatrix}$$

这就证实了上述结论。但如果空间飞行器是以 Oy 为轴的旋转体，且又是均质的，则必有 $J_x = J_z = J_t$，即对于任意与自旋轴垂直方向的转动惯量皆为 J_t，那么由上式可得

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_t & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_t \end{bmatrix}$$

它已经和 $\underline{J}_b$ 完全一致了。

如果不考虑轨道角速度 ω_0，空间飞行器的姿态角速度 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}$ 和自旋角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 之和是 $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}$，若姿态角和角速度都是小量，据 10.2 节有 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\dot{\varphi}\ \dot{\vartheta}\ \dot{\psi})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}$ 在 $Ox_by_bz_b$ 中的分量是(当初始夹角 ν_0 为零时)

$$\underline{C}_{bx} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} + \Omega \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \cos \Omega t - \dot{\psi} \sin \Omega t \\ \dot{\vartheta} + \Omega \\ \dot{\varphi} \sin \Omega t + \dot{\psi} \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

可见，在 Ox_b 和 Oz_b 轴上的分量也是周期变化的。

第十一章 空间飞行器姿态动力学基本方程

空间飞行器姿态动力学是研究姿态运动和空间飞行器上作用力矩之间关系的。

11.1 动能

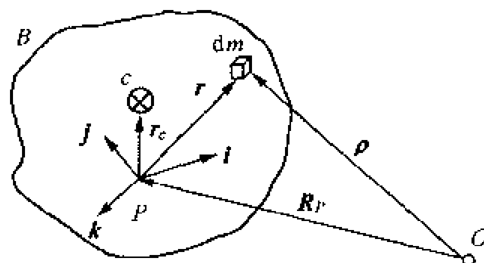


图 11.1 刚体运动的动能

图 11.1 给出一个在惯性空间以 $\boldsymbol{\omega}$ 角速度运动的刚体 B,P 是刚体上的某一固定点,它相对惯性参考点 O 的矢量是$\boldsymbol{R}_P$,其上固联有基矢 $\underline{\boldsymbol{e}} = [\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}$,$\mathrm{d}m$ 是B上的任意微元质量,它相对 P 的矢径是$\boldsymbol{r}$,相对 O 点的矢径是 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_P + \boldsymbol{r}$。$\mathrm{d}m$ 的绝对速度是$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{R}}_P + \dot{\boldsymbol{r}}$,其中 $\dot{\boldsymbol{R}}_P$ 是P相对惯性空间的速度;$\dot{\boldsymbol{r}}$ 是 $\mathrm{d}m$ 相对P在惯性空间的速度,它还应分解为对 P 点的相对速度和随B体一起转动形成的速度,这一分解可借助式(附 5.3) 完成,即 $\dot{\boldsymbol{r}} = \mathring{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$。由于 dm 相对 P 是不运动的(刚体之故),所以 $\mathring{\boldsymbol{r}} = 0$。因此 $\mathrm{d}m$ 微元体的速度是

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{11.1}$$

它的动能是 $\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}m$,而整个刚体的动能是

$$T = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}m,$$

$\int_B$ 表示积分遍于整个刚体 B。把式(11.1) 代入,化简后,得

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{v}_p m + \boldsymbol{v}_p \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \int_B \boldsymbol{r}\mathrm{d}m) + \frac{1}{2}\int_B (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m$$

其中$\int_B \boldsymbol{r}\mathrm{d}m$ 是刚体相对P点的一次静矩,可写成 P 点到质心C矢径$\boldsymbol{r}_c$(图 11.1) 与刚体质量 m 的乘积

$$\int_B \boldsymbol{r}\mathrm{d}m = \boldsymbol{r}_c m \tag{11.2}$$

而右侧第三项可用式(附 3.39) 改造。所以有

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{v}_p m + \boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{r}_c m + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{11.3}$$

其中,$\mathbb{J}$ 是 B 对 P 点的转动惯量张量(并矢)。右端第一项表示 B 体的平移运动动能,第三项是转动运动的动能,而第二项是平移和转动交叉的动能。假如 $\dot{\boldsymbol{v}}_p$ 与$\boldsymbol{r}_C$垂直或者p点与质心重合,式(11.3) 就成为

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{v}_p m + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{11.4a}$$

写成分量形式，是

$$T = \frac{1}{2}v_p^2 m + \underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}\underline{\omega} \tag{11.4b}$$

$\underline{\omega}$ 和 $\underline{J}$ 为刚体固联基矢系中的分量

$$\underline{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}} \tag{11.5}$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

代入还可求得刚体动能在体固联系中的表达式

$$T = \frac{1}{2}(v_p^2 m + J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) - J_{xy}\omega_x\omega_y - J_{yz}\omega_y\omega_z - J_{xz}\omega_x\omega_z \tag{11.7}$$

11.2 角动量(动量矩)

图 11.1 中 dm 微元体的动量(又称线动量)是 $\boldsymbol{v}\mathrm{d}m$，它相对惯性空间参考点 O 的角动量或动量矩是 $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}m$，相对于 P 点的动量矩为 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}m$，整个刚体相对 P 点的角动量或动量矩是

$$\boldsymbol{h} = \int_B \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}m$$

把式(11.1)代入，并考虑到式(11.2)，有

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_p m + \int_B \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m \tag{11.8}$$

如果 P 点固定不动或 P 与质心重合，或 P 的运动方向 $\boldsymbol{v}_p$ 与 $\boldsymbol{r}_c$ 一致，式(11.8) 成为

$$\boldsymbol{h} = \int_B \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m \tag{11.9}$$

而根据式(附 3.36)，有

$$\int_B \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{11.10}$$

可见，角动量的一般表达式是式(11.8)，而式(11.9) 和式(11.10) 分别是参考 P 点无平移运动和与质心重合时的特例。如果合并式(11.9) 和式(11.10)，并把 $\boldsymbol{h}$ 写成刚体固联系中的分量形式，将有

$$\boldsymbol{h} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{J}\underline{\omega} = \boldsymbol{i}(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z) + \boldsymbol{j}(-J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z) + \boldsymbol{k}(-J_{xz}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z) \tag{11.11}$$

可见，相对质心的角动量只与旋转运动有关，但因为基矢方向未与主惯性轴重合，某一方向的角动量与另外两方向的角速度有关，即角速度有交叉影响。但当 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 基矢与主惯性轴重合时，因有 $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$，交叉影响没有了，得

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{i}J_x\omega_x + \boldsymbol{j}J_y\omega_y + \boldsymbol{k}J_z\omega_z \tag{11.12}$$

这是最简单的情况。

式(11.11)和式(11.12)都表明,一般情况下 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是不一致的,只当基矢 $\boldsymbol{e}$ 与主惯性轴重合,而且各方向的主惯量全同,或角速度是沿某一主惯性轴方向时,$\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 才是方向相同的。

11.3　欧拉方程式

欧拉方程式是描述物体在力矩作用下的运动规律的。

图 11.1 中的刚体 B 上某微元体 $\mathrm{d}m$ 在力矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用下,会产生加速度 $\boldsymbol{a}$ 和惯性力 $\boldsymbol{a}\mathrm{d}m$,惯性力对 P 点的矩是 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}m$,对整个刚体 B 的积分是刚体相对 P 点的惯性力矩,它应该和外力矩相等,即

$$\int_B \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}m = \boldsymbol{M} \tag{11.13}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 可通过速度式(11.1)对时间求导而得

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 已在 11.1 节中被写成 $\dot{\boldsymbol{r}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,所以

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{11.14}$$

可见任意微元体 $\mathrm{d}m$ 的加速度由三部分组成,它们是:P 点运动的加速度(牵连加速度)$\boldsymbol{a}_p$;角加速度引起的加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$;以及向心加速度 $\omega\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$。

把式(11.14)代入式(11.13)经推导,得

$$\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{a}_p m + \int_B \boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m + \int_B \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\mathrm{d}m = \boldsymbol{M}$$

根据式(附 3.36)和式(附 3.41),上式可改造为

$$\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{a}_p m + \mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M} \tag{11.15}$$

这是一般情况下的欧拉方程式,但当 P 点与质心重合,P 点固定不动和 P 点加速度与 $\boldsymbol{r}_c$ 方向重合时,上式成为

$$\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M} \tag{11.16}$$

我们把式(11.15)的分量形式的推导留给读者,下面将只给出式(11.16)的分量形式。如果 $\mathbb{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量表达式如式(11.5)和式(11.6),而取

$$\underline{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^{\mathrm{T}} \tag{11.17}$$

则式(11.16)可写成刚体固联系中的欧拉方程式

$$J_x\dot{\omega}_x - J_{xy}\dot{\omega}_y - J_{xz}\dot{\omega}_z - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z - J_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - J_{xz}\omega_x\omega_y + J_{xy}\omega_x\omega_z = M_x \tag{11.18a}$$

$$-J_{xy}\dot{\omega}_x + J_y\dot{\omega}_y - J_{yz}\dot{\omega}_z - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x - J_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - J_{xy}\omega_y\omega_z + J_{yz}\omega_y\omega_x = M_y \tag{11.18b}$$

$$-J_{xz}\dot{\omega}_x - J_{yz}\dot{\omega}_y + J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y - J_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - J_{yz}\omega_z\omega_x + J_{xz}\omega_z\omega_y = M_z \tag{11.18c}$$

而当基矢 $\underline{e}$ 与惯性主轴重合时,上述方程式可以简化为

$$J_x\dot{\omega}_x - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z = M_x \tag{11.19a}$$

$$J_y\dot{\omega}_y - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x = M_y \tag{11.19b}$$

$$J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y = M_z \tag{11.19c}$$

可见,一般情况下,坐标轴三个方向的转动运动是相互耦合的,甚至惯性积为零也是这样。

从式(11.15)还可以看出,平移运动与旋转运动是互相有影响的,除非有 P 点与质心重合等使左侧第一项等于零的三种情况(见前),才不存在耦合影响,这也是通常取刚体质心为观测点的缘故。

11.4 简化刚体空间飞行器的姿态运动方程式

对于空间飞行器,其姿态角是以轨道坐标系为参考的,而轨道坐标系又绕地心以 ω_0 运动,因此空间飞行器的绝对角速度应由姿态角速度和轨道运动角速度两部分组成,这就是第十章中式(10.18)和表10.2的有关式。把式(10.18)(或表10.2中有关式)代入11.3节中的欧拉方程式,就得到了简单刚体卫星的姿态运动方程式。由于有姿态角的三角函数,所得的姿态运动方程式是非线性变系数的,多数情况还是各轴相互耦合的。一般说,这些方程式只能借助电子计算机,进行数值求解。

以 $z(\psi)\rightarrow y(\vartheta)\rightarrow x(\varphi)$ 从轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 向飞行器坐标系 $Oxyz$ 变换为例。它的姿态角速度与 ω^* 的关系是式(10.18),即

$$\underline{\omega}^* = \begin{bmatrix}\omega_x^*\\ \omega_y^*\\ \omega_z^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & \cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\vartheta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\vartheta\sin\psi\\ \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi\\ -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi\end{bmatrix}\omega_0 \tag{10.18}$$

把它代入11.3节中的有关式,其复杂程度可以想见,本节不再给出。

所幸的是,在正常姿态控制情况下,$Oxyz$ 对 $OX_oY_oZ_o$ 坐标系的偏离很小,使得姿态角和姿态角速度都是小量,可以只保留这些角度和角速度的一次项,而略去它们的二次以上各项,使方程式线性化。根据这个原则,先从由式(10.18)简化得到的式(10.21),求出圆轨道卫星的角加速度

$$\dot{\underline{\omega}}^* = \begin{bmatrix}\dot{\omega}_x^*\\ \dot{\omega}_y^*\\ \dot{\omega}_z^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ddot{\varphi} - \omega_0\dot{\psi}\\ \ddot{\vartheta}\\ \ddot{\psi} + \omega_0\dot{\varphi}\end{bmatrix} \tag{11.20}$$

再和式(10.21)一同代入上节的姿态运动方程。为了简单,取式(11.19),可导得

$$J_x\ddot{\varphi} + (J_y - J_z - J_x)\omega_0\dot{\psi} + (J_y - J_z)\omega_0^2\varphi = M_x \tag{11.21a}$$

$$J_x\ddot{\vartheta} = M_y \tag{11.21b}$$

$$J_z\ddot{\psi} - (J_y - J_z - J_x)\omega_0\dot{\varphi} + (J_y - J_x)\omega_0^2\psi = M_z \tag{11.21c}$$

对于这种变换顺序的姿态运动方程式,它的俯仰轴运动和另两轴是解耦的,而滚转和偏航却是互相耦合的。坐标变换矩阵其他变换顺序的姿态运动方程式,可以根据具体情况,从表10.2中查出姿态角速度的变换关系式,经类似的推导过程得到。

第十二章　重力梯度力矩和重力梯度稳定卫星

我们已经习惯地认为地球引力 g 是常值，然而它却是随着与地心距离的增大而减小的，只是我们在地面上遇到的高度差一般未造成显著的影响，使人们忽略了重力的变化。然而，在卫星的轨道上，重力本身已经很小，更因轨道运动的离心力与重力相平衡，使卫星成为失重状态。这就使哪怕很小一点力矩的作用都会造成明显的影响。

所谓重力梯度力矩，就是重力在卫星的不同点上因具有不同的数值和方向，而形成的绕质心的力矩。而重力梯度则是重力随位置的变化率，或位置的单位变化引起的重力变化量。

重力梯度力矩有时对空间飞行器表现为有害的扰动力矩，应考虑如何抵消它们的影响；有时它们的影响又是有益的，可被利用来稳定卫星的姿态。

12.1　重力梯度力矩

先以简单的例子说明重力梯度力矩的概念。图 12.1 给出了地球圆轨道上运动的杆状卫星，它由一长度为 l 的无质量刚性杆和尖端两质点 m_1 和 $m_2(m_1 = m_2 = m)$ 组成。当刚性杆呈水平状态时(图 12.1(a))，由于几何对称，地心引力 $G_{10} = G_{20}$，它们对质心 a 点的力矩是零，说明重力并未对卫星的姿态产生任何影响。在本例中 m_1 和 m_2 两质点上因卫星作圆轨道运动而造成的离心力 $P_{10} = P_{20}$，它们也未对卫星造成力矩，因此，卫星姿态处于平衡状态。如果由于某种原因，使卫星产生了俯仰角 ϑ(图 12.1(b))。m_1 比平衡位置远离地心，因此重力 $G_1 < G_{10}$，而离心力 $P_1 > P_{10}$；对于 m_2 恰恰相反，离地心较近，且 $G_2 > G_{20}$ 和 $P_2 < P_{20}$。最终的结果，在卫星上既出现了绕质心的重力力矩，又出现了离心力的力矩，它们作用结果使卫星朝着俯仰角 ϑ 增大的方向变化。这里由于 m_1 和 m_2 两点因对于地心的高度不同产生了重力的差异，并造成了对地心的力矩，就是重力梯度力矩。

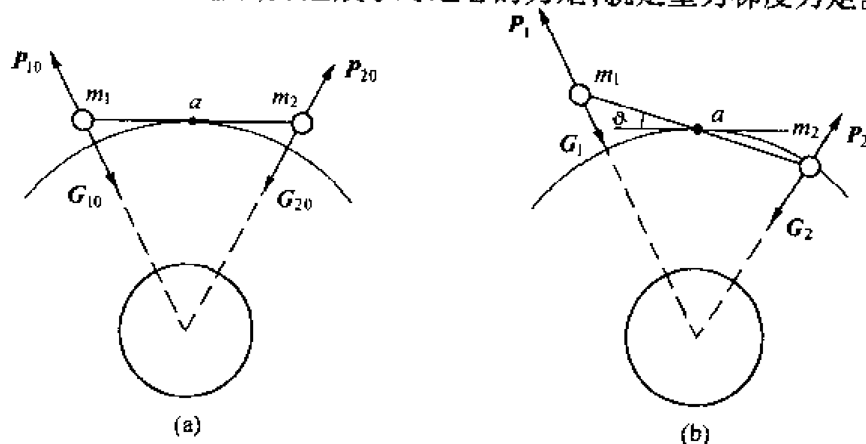


图 12.1　重力梯度力矩的产生

下面分析刚体卫星在轨道上运动时，产生的重力梯度力矩。图 12.2 中 B 是卫星，O 为质心，$Oxyz$ 是空间飞行器坐标系，基矢为 $\underline{e} = [\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}$，$R$ 是轨道半径。取 B 上一质点微元 $\mathrm{d}m$，它距 O 和地心 E 的矢径为 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{r}$。微元体的重力是

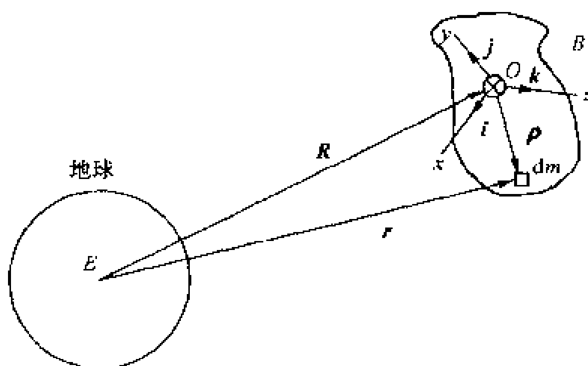


图 12.2　刚体卫星的重力梯度力矩

$$dG = -G\frac{M_e \mathrm{d}m}{r^3}\boldsymbol{r} = -\frac{\mu \mathrm{d}m}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中，G 是万有引力常数，M_e 为地球质量，$\mu = GM_e$ 是地球引力常量。显然，$\boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{G}$ 是微元体重力形成的绕质心力矩，再对整个 B 体积分便是作用在 B 上的重力梯度力矩

$$\boldsymbol{M}_g = \int_B \boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{G}$$

把 $\mathrm{d}\boldsymbol{G}$ 代入上式，并考虑到 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}$，有

$$\boldsymbol{M}_g = -\mu\int_B \boldsymbol{\rho} \times \frac{\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}}{r^3}\mathrm{d}m = -\mu\int_B \frac{\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R}}{r^3}\mathrm{d}m$$

由图 12.2 的几何关系，应用余弦定理，可写出

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\rho}$$

考虑到 $r/R \ll 1$，并应用二项式定理，由上式可得

$$r^{-3} \approx R^{-3}\left(1 - \frac{3\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\rho}}{R^2}\right)$$

把它代入 $\boldsymbol{M}_g$ 表达式，有

$$\boldsymbol{M}_g = -\frac{\mu}{R^3}\int_B \boldsymbol{\rho}\mathrm{d}m \times \boldsymbol{R} + \frac{3\mu}{R^5}\int_B \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\rho}\,\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R}\mathrm{d}m$$

由于 O 点为 B 的质心，第一项积分为零，再应用 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ 于第二项，得

$$\boldsymbol{M}_g = \frac{3\mu}{R^5}\boldsymbol{\rho} \times \int_B [\boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{\rho})]\mathrm{d}m$$

对照式(附 3.41)，上式可改造成

$$\boldsymbol{M}_g = \frac{3\mu}{R^5}\boldsymbol{R} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{R} \tag{12.1}$$

若把 $\boldsymbol{R}$ 在 $Oxyz$ 系中分解成 $\boldsymbol{R} = \underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{R}$，并进一步写成

$$\underline{R} = R[\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3]^{\mathrm{T}} \tag{12.2}$$

α_1、α_2 和 α_3 是 $\boldsymbol{R}$ 与空间飞行器坐标系 Ox、Oy 和 Oz 轴间的夹角余弦。把式(12.2) 代入式(12.1)，写成分量形式，有

$$\boldsymbol{M}_g = \underline{e}^{\mathrm{T}}\frac{3\mu}{R^3}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}\underline{J}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{12.3}$$

当 $\underline{e}$ 基矢任意取向时，有

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}$$

式(12.3)就可展开成为

$$\boldsymbol{M}_g = \frac{3\mu}{R^3}\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J_z - J_y)\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)J_{yz} - \alpha_1\alpha_2 J_{xz} + \alpha_1\alpha_3 J_{xy} \\ (J_x - J_z)\alpha_1\alpha_3 + (\alpha_1^2 - \alpha_3^2)J_{xz} - \alpha_2\alpha_3 J_{xy} + \alpha_1\alpha_2 J_{yz} \\ (J_y - J_x)\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)J_{xy} - \alpha_1\alpha_3 J_{yz} + \alpha_2\alpha_3 J_{xz} \end{bmatrix} \tag{12.4}$$

这是重力梯度力矩的一般表达式。对于自 $OX_oY_oZ_o$ 向 $Oxyz$ 转动的顺序为 $z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi)$(见图 10.2)的情况，坐标变换矩阵 $\underline{C}_{x0}$ 为式(10.10)。$\boldsymbol{R}$ 在 $OX_oY_oZ_o$ 中沿 OZ_o 负方向，它在此系中的分量是$[0\quad 0\ -R]^{\mathrm{T}}$，变换到 $Oxyz$ 中则是

$$\underline{R} = \underline{C}_{x0}[0\quad 0 - R]^{\mathrm{T}} = R[\sin\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta - \cos\varphi\cos\vartheta]^{\mathrm{T}}$$

与式(12.2)比较，显然有

$$\alpha_1 = \sin\vartheta,\ \alpha_2 = -\sin\varphi\cos\vartheta,\ \alpha_3 = -\cos\varphi\cos\vartheta \tag{12.5}$$

把式(12.5)代入式(12.4)，可以求得 $\boldsymbol{M}_g$ 在 $Oxyz$ 中的分量

$$\boldsymbol{M}_g = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{3\mu}{R^3}\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(J_z - J_y)\sin 2\varphi\cos^2\vartheta + J_{yz}\cos 2\varphi\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}J_{xz}\sin\varphi\sin 2\vartheta - \frac{1}{2}J_{xy}\cos\varphi\sin 2\vartheta \\ \frac{1}{2}(J_z - J_x)\cos\varphi\sin 2\vartheta + J_{xz}(\sin^2\vartheta - \cos^2\varphi\cos^2\vartheta) - \frac{1}{2}J_{xy}\sin 2\varphi\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}J_{yz}\sin\varphi\sin 2\vartheta \\ \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin\varphi\sin 2\vartheta + J_{xy}(\sin^2\varphi\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}J_{yz}\cos\varphi\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}J_{xz}\sin 2\varphi\cos^2\vartheta \end{bmatrix} \tag{12.6}$$

如果姿态角为小角度，令角度的正弦与角度相等，余弦为 1，且略去角度二阶以上乘积项，式(12.6)将成为

$$\boldsymbol{M}_g = \frac{3\mu}{R^3}\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J_z - J_y)\varphi + J_{yz} - J_{xy}\vartheta \\ (J_z - J_x)\vartheta - J_{xz} - J_{xy}\varphi \\ J_{yz}\vartheta + J_{xz}\varphi \end{bmatrix} \tag{12.7}$$

如果刚体的惯量积为零，即 $\underline{e}$ 三个基矢同时与三主轴重合，则式(12.6)成为

$$\boldsymbol{M}_g = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{bmatrix} = \frac{3\mu}{2R^3}\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J_z - J_y)\sin 2\varphi\cos^2\vartheta \\ (J_z - J_x)\cos\varphi\sin 2\vartheta \\ (J_x - J_y)\sin\varphi\sin 2\vartheta \end{bmatrix} \tag{12.8}$$

对于小姿态角的情况，是

$$\boldsymbol{M}_g = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{bmatrix} = \frac{3\mu}{R^3}\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J_z - J_y)\varphi \\ (J_z - J_x)\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.9}$$

对于圆轨道上的空间飞行器，在轨道动力学部分，我们曾经求得

$$\frac{\mu}{R^3} = \omega_0^2 \tag{12.10}$$

ω_0 是轨道角速度，因此，上述诸式前的因式可改写成 ω_0^2。

在结束本节的时候，简要说明一下重力梯度力矩为零的可能条件。分析式(12.3)易知，$M_g = 0$ 的可能只有当：ⅰ) $Oxyz$ 的三根轴和空间飞行器的主轴重合，即

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}$$

和 ⅱ) $Oxyz$ 的任意一坐标轴和地球半径方向重合。以 Oz 轴与 $\boldsymbol{R}$ 负方向一致为例，此时有

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1。$$

把这些关系代入式(12.3)，便可证实这个可能的条件。

12.2 圆轨道重力梯度稳定卫星

为了简单，设空间飞行器坐标轴与主惯性轴重合，在圆轨道上运动，其上作用的外力只有重力梯度力矩，而且卫星的姿态角为小量。在这些条件下，姿态运动方程式如式(11.21)，而作用力矩由式(12.9)和式(12.10)求得，经并项后，有

$$\begin{aligned} &J_x\ddot{\varphi} + (J_y - J_z - J_x)\omega_0\dot{\psi} + 4(J_y - J_z)\omega_0^2\varphi = 0 \\ &J_y\ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2(J_x - J_z)\vartheta = 0 \\ &J_z\ddot{\psi} - (J_y - J_z - J_x)\omega_0\dot{\varphi} + (J_y - J_x)\omega_0^2\psi = 0 \end{aligned} \tag{12.11}$$

这三个方程式中，第二个(俯仰)是独立的，它的解是

$$\vartheta = Ae^{\sqrt{3(J_z - J_x)/J_y}\,\omega_0 t} \tag{12.12}$$

这表明，俯仰运动稳定的条件是

$$J_x > J_z \tag{12.13}$$

再研究式(12.11)第一式和第三式相互耦合的式子，取它们的拉氏变换，得

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4k_x\omega_0^2 & (k_x - 1)\omega_0 s \\ (1 - k_z)\omega_0 s & s^2 + k_z\omega_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$k_x = \frac{J_y - J_z}{J_x}, k_z = \frac{J_y - J_x}{J_z} \tag{12.14}$$

而它的特征方程式是

$$s^4 + (1 + 3k_x + k_xk_z)\omega_0^2 s^2 + 4k_xk_z\omega_0^4 = 0 \tag{12.15}$$

特征方程式为四阶，但缺少 S 的一次和三次项，如果以 $f(s)$ 表示式(12.15)的左侧多项式，再令

$$s = -s^* \tag{12.16}$$

代入，显然有

$$f(s) = f(-s^*) \tag{12.17}$$

这表明特征方程式(12.15)的根只能取虚数，即 $s = j\omega$ 系统才能稳定，否则总会有一部分根位于根轨迹平面右侧，系统不稳。为求式(12.15)的根，令 $\lambda = s^2$，则有

$$\lambda^2 + (1 + 3k_x + k_x k_z)\omega_0^2 \lambda + 4k_x k_z \omega_0^4 = 0$$

s 为纯虚数的条件是 λ 为负，即

$$\begin{aligned} &1 + 3k_x + k_x k_z > 0 \\ &k_x k_z > 0 \\ &1 + 3k_x + k_x k_z > 4\sqrt{k_x k_z} \end{aligned} \tag{12.18}$$

分析式(12.18)三式易知，满足第三式将必然地满足第一式，所以只要有第二、三两个判别式即可推论系统的稳定性。由第二式知，k_x 和 k_z 必须同号，系统才可能稳定。这又可分两种情况。

如果 $k_x > 0, k_z > 0$，则由式(12.13)和式(12.14)可推断，必有

$$J_y > J_x > J_z \tag{12.19a}$$

而当 $k_x < 0$ 和 $k_z < 0$，同理可推得

$$J_x > J_z > J_y \tag{12.19b}$$

如果把式(12.13)和式(12.18)合并起来，绘在惯量比 k_x 为横轴，k_z 为纵轴的稳定区域划分图中，将有如图12.3所示结果。其中第二和四象限不稳是因为 k_x 和 k_z 异号，第三象限中的曲线，是式(12.18)第三式确定的稳定边界；斜线下方稳定是由式(12.13)得到的。后一结果可反证如下：在图12.3斜线下方有 $k_x > k_z$，即 $\frac{J_y - J_z}{J_x} > \frac{J_y - J_x}{J_z}$，移项整理后得 $J_y(J_z - J_x) > (J_z + J_x)(J_z - J_x)$。

由于任意坐标轴的转动惯量小于另两轴的惯量和，因此应有 $(J_z - J_x) < 0$，这恰是式(12.13)。反证成立。

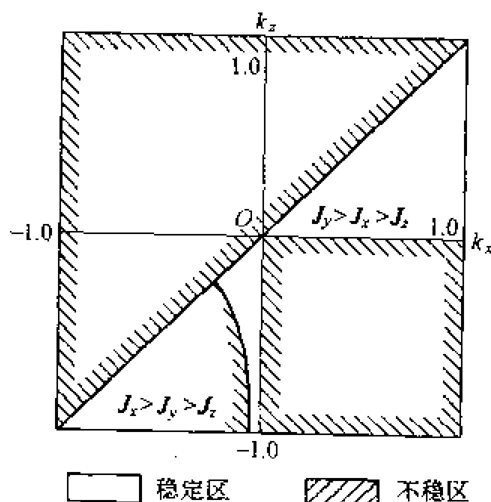


图12.3　圆轨道重力梯度卫星的姿态稳定区域划分

上述稳定分析，也可借助附录9的定理9.7进行，会得到同样的结果，有兴趣者可以参照表9.1自行推导。

鉴于 $k_x - k_z$ 稳定区域划分图在下面有关章节中还要应用，知道 k_x 和 k_z 的取值应在 ± 1 之间对读者是有用的。这是因为任何方向的主转动惯量必小于另两方向主转动惯量之和，若取 $J_y \leqslant J_x + J_z$ 和 $J_x \leqslant J_y + J_z$，把 J_x 和 J_y 移至同一侧再除以 J_z，便可求得 $-1 \leqslant k_z \leqslant 1$。同理还可证明 $-1 \leqslant k_x \leqslant 1$。

式(12.11)是以圆轨道为前提求得的，然而事实上，圆轨道一般很难得到，多半是接近圆形的椭圆。下面分析这类空间飞行器，在重力梯度力矩下的行为，其轨道角速度如

式(10.17c)所示，角加速度是

$$\dot{\omega}_0 \approx -\frac{2e\mu}{p^3}(1+e\cos\theta)^3\sin\theta \approx -\frac{2e\mu}{p^3}(1+3e\cos\theta)\sin\theta \tag{12.20}$$

把式(10.17c)代入式(10.21)再和式(12.9)一同代入式(11.19)，考虑到式(12.20)并略去二阶小量后，得到姿态动力学方程

$$\begin{aligned} &J_z\ddot{\varphi}+(J_y-J_z-J_x)n\dot{\psi}+4(J_y-J_z)n^2\varphi=0\\ &J_y\ddot{\vartheta}+3n^2(J_x-J_z)\vartheta=-J_y2n^2e\sin(nt_p)\\ &J_z\ddot{\psi}-(J_y-J_z-J_x)n\dot{\varphi}+(J_y-J_x)n^2\psi=0 \end{aligned} \tag{12.21}$$

在推导上述方程过程中，曾取

$$\frac{\mu}{p^3}\approx\frac{\mu}{R^3}=n^2$$

和

$$\theta=nt_p$$

其中 n 是平均轨道角速度，t_p 是自近地点计算的时间，而 θ 是轨道的真近角。比较式(12.21)和式(12.11)，显见，只是式(12.21)的俯仰运动方程中多了右侧项，其余则两者相同。可见在重力梯度作用下，保持空间飞行器滚动和偏航稳定的条件仍然与圆轨道飞行器相同。

12.3　圆和近圆轨道重力梯度稳定卫星的俯仰运动

如果滚转和偏航角为零，取消小姿态角的限制后，把式(12.8)代入式(11.19b)，则俯仰运动方程，得

$$\ddot{\vartheta}+3\omega_0^2k_y\sin\vartheta\cos\vartheta=0 \tag{12.22}$$

其中

$$k_y=\frac{J_x-J_z}{J_y} \tag{12.23}$$

将 $\ddot{\vartheta}$ 改写为

$$\ddot{\vartheta}=\frac{d\dot{\vartheta}}{dt}=\frac{d\dot{\vartheta}}{d\vartheta}\dot{\vartheta}$$

代入式(12.22)积分得

$$\dot{\vartheta}^2+3\omega_0^2k_y\sin^2\vartheta=c=3k_y\omega_0^2d \tag{12.24}$$

c 和 d 是与初始条件有关的积分常数。利用上式，以 ϑ 和 $\dot{\vartheta}/\sqrt{3k_y}\omega_0$ 为横及纵坐标，绘成如图12.4所示的相图。当 $d\leqslant1$ 时，式(12.24)描述的是一种周期性的振动，相平面轨迹是一封闭曲线；当 $d>1$ 时，运动变成连续不断的旋转，卫星将在空间翻滚。

对于 $d\leqslant1$ 的振动情况，其运动时间可以写为

$$t=\int_0^t dt=\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}}$$

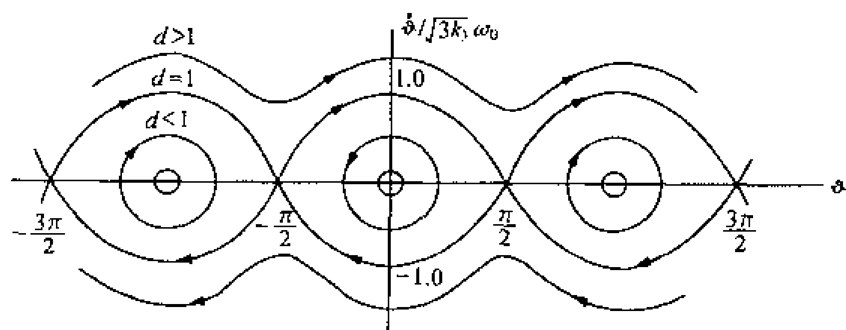


图 12.4　圆轨道重力稳定卫星俯仰运动相图

由式(12.24)求得 $\dot{\vartheta}$ 代入上式，有

$$t = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{3k_y}\omega_0 \sqrt{d - \sin^2\vartheta}} \tag{12.25}$$

令 $d = \sin^2\alpha$，若积分上限取 $\vartheta = \alpha$(即振动从零达到其幅值 α)时，t 恰为1/4个周期，空间飞行器俯仰运动的周期是

$$T = \frac{4}{\sqrt{3k_y}\omega_0}\int_0^{\alpha} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\vartheta}} \tag{12.26}$$

显然，俯仰振动的周期 T 不仅取决于飞行器质量特性 k_y，还与振动的幅值 α 有关，这是非线振动和线性振动系统的重要区别之一。如果 $k_y = 1$，而振动周期与空间飞行器轨道周期相等($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$)，由式(12.24)可以求得[8]

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

经计算，有 $\alpha = 1.294 = 74.16°$ 而 $d = \sin\alpha = 0.962$。

对于 $d > 1$ 的情况，运动是非周期的，旋转时间和角度的关系可用式(12.25)计算。对于 $k_y = 1$ 的空间飞行器，若旋转一周的时间刚好与轨道周期相同，对应的 $d = 1.065$。

现在我们再来研究，近圆轨道上运动的飞行器在重力梯度力矩作用下的俯仰运动。为此给出式(12.21)第二式的特解

$$\vartheta^* = -\frac{2e\sin(nt_p)}{3\dfrac{J_x - J_z}{J_y} - 1} = \frac{2e}{1 - 3k_y}\sin(nt_p) \tag{12.27}$$

其全解是式(12.27)和式(12.12)之和。分析式(12.27)可知，当 $k_y = 1/3$ 时，ϑ^* 为无穷大，飞行器俯仰运动不稳。所以，在选择 k_y 值时，应注意勿使它在1/3左右。如果从式(12.27)取俯仰振动的幅值，并绘出 ϑ^*/e 与 k_y 的关系，示于图 12.5，可见在 $k_y = 1/3$ 点处产生“共

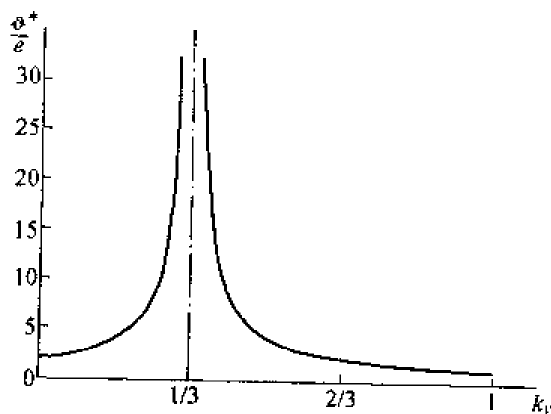


图 12.5　近圆轨道上空间飞行器的俯仰运动振幅

振”现象。

12.4 能量损耗对重力梯度稳定卫星的影响

当有能量损耗时,前面导出的结论将有些变化。假如空间飞行器不是十分刚硬,在轨道飞行中会有些弹性变形,结构内部的晶格之间因摩擦将造成能量的消耗。如果认为这些消耗和姿态角速度成正比,在式(12.11)的三式中分别加入 $C_\varphi\dot{\varphi}$, $C_\theta\dot{\vartheta}$ 和 $C_\psi\dot{\psi}$。显然,此时的俯仰运动式(12.11)第二式仍独立于滚动和偏航,而后两者继续相互耦合。俯仰运动稳定的条件依然是式(12.13),即

$$J_x > J_z \tag{12.28}$$

但都是渐近稳定的。滚动和偏航运动的特征方程式成为

$$s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

其中

$$a_3 = \frac{C_\varphi}{J_x} + \frac{C_\psi}{J_z}$$

$$a_2 = (1 + 3k_x + k_x k_z)\omega_0^2 + \frac{C_\varphi}{J_x}\frac{C_\psi}{J_z}$$

$$a_1 = (\frac{C_\varphi}{J_x}k_z + 4\frac{C_\psi}{J_z}k_x)\omega_0^2$$

$$a_0 = 4k_x k_z \omega_0^4$$

根据附录7,四阶特征方程式系统稳定的充要条件是 $a_3, a_1, a_0, \Delta_3 > 0$,即

$$\frac{C_\varphi}{J_x} + \frac{C_\psi}{J_z} > 0 \tag{12.29}$$

$$\frac{C_\varphi}{J_x}k_z + \frac{C_\psi}{J_z}k_x > 0 \tag{12.30}$$

$$k_x k_z > 0 \tag{12.31}$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 \tag{12.32}$$

上面四式中式(12.29)显然被满足,而由式(12.30)和式(12.31)易知,应有

$$k_x > 0, k_z > 0 \tag{12.33}$$

即

$$J_y > J_z, J_y > J_x \tag{12.34}$$

由式(12.34)和式(12.28)的条件,绘得的稳定区域划分图如图12.6所示,它表示在有能量损耗时,只有当俯仰轴的转动惯量最大,偏航轴转动惯量最小,空间飞行器才有可能稳定。若要真的稳定还要满足式(12.32)的要求。

和上节相比较,那里空间飞行器的俯仰轴具有最大或最小转动惯量时,都可能是稳定

的。正像自由转动的刚体一样，在没有能量耗损时，绕最大和最小惯量轴的旋转是稳定的；有了能量耗损后，绕最小惯量轴的转动就成为不稳定的了，只有绕最大惯量轴转才有稳定的可能(但不一定稳定)。

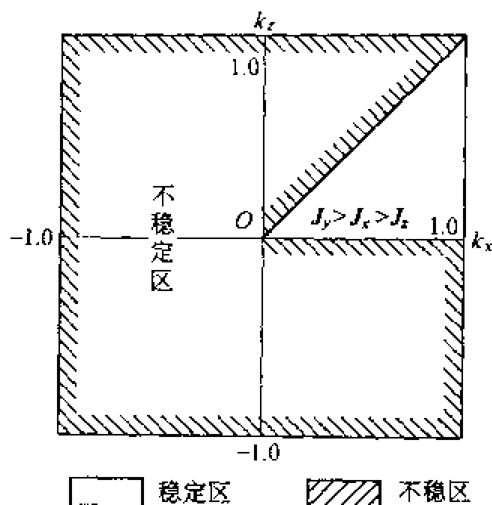


图 12.6　有能量损耗时重力梯度力矩卫星的稳定域

上面对存在能耗时，它对姿态稳定性的影响做了一般分析，而要获得定量的结论，还得有粘性阻尼的具体数据，和能被人们调节的余地，这就导至阻尼器在空间飞行器上的应用。下面以圆轨道上运动的重力梯度稳定卫星增设阻尼器为例，说明阻尼对稳定性的影响。阻尼器 D 由弹簧支撑的活塞和阻尼阀组成，活塞被安装在 Ox 轴上，距质心 O 为 l，活塞沿 Oy 运动，位移为 $\boldsymbol{\eta}$，其平衡位置在 Ox 轴上($\boldsymbol{\eta}=0$)(见图 12.7)。B 是空间飞行器，当活塞处于 Ox 轴上时卫星质心在 O 点，转动惯量矩阵 $\underline{J}_0$ 为对角的，它由除阻尼器活塞外的飞行器惯量 $\underline{I}_b$ 和阻尼器造成的惯量构成。

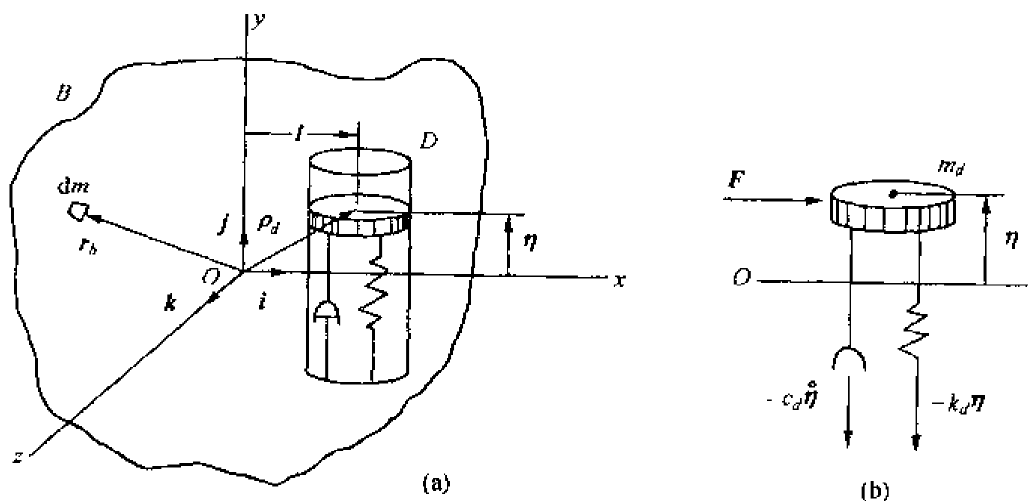


图 12.7　带阻尼器的重力梯度力矩稳定空间飞行器

$$\underline{J}_0=\begin{bmatrix}J_x & & 0\\ & J_y & \\ 0 & & J_z\end{bmatrix}=\underline{I}_b+m_d(\underline{l}^{\mathrm{T}}\underline{l}\,\underline{E}-\underline{l}\,\underline{l}^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}I_{bx} & 0 & 0\\ 0 & I_{by}+l^2m_d & 0\\ 0 & 0 & I_{bz}+l^2m_d\end{bmatrix} \tag{12.35}$$

或

$$J_x=I_{bx},J_y=I_{by}+l^2m_d,J_z=I_{bz}+l^2m_d \tag{12.36}$$

式中，m_d 是活塞质量，它被视为质点，在 $Oxyz$ 中的转动惯量是参考式(附 3.35)写出的。活塞在任意位置时，O 至其中心的矢距为 $\boldsymbol{\rho}_d=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\eta}=l\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}$，若 η 为小量，并略去其自乘

积，则飞行器的转动惯量是

$$\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{I}_b + m_d(\underset{\sim}{\rho}_d^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{\rho}_d\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{\rho}_d\underset{\sim}{\rho}_d^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} J_x & -l\eta m_d & 0 \\ -l\eta m_d & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \tag{12.37}$$

为导出带有阻尼器的姿态运动方程式，先给出 B 体上某质点 $\mathrm{d}m$ 的加速度，它距 O 点的矢距是 $\boldsymbol{r}_b$，$\boldsymbol{v}_0$ 是质心 O 的速度，则有绝对速度和加速度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_b &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_b \\ \boldsymbol{a}_b &= \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_b + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_b) \end{aligned} \tag{12.38}$$

而活塞的绝对速度和加速度是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_d &= \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_d = \boldsymbol{v}_0 + \mathring{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_d \\ \boldsymbol{a}_d &= \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_d = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathring{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_d + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_d) \end{aligned} \tag{12.39}$$

空间飞行器的姿态运动方程式，可通过求对 O 点的力矩平衡条件得到，即

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{a}_b \mathrm{d}m + m_d \boldsymbol{\rho}_d \times \boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{M} \tag{12.40}$$

把式(12.38) 和式(12.39) 代入式(12.40)，考虑到 O 点是质心，因而

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \mathrm{d}m + \boldsymbol{\rho}_d m_d = 0 \tag{12.41}$$

并参考式(附 3.36) 和式(附 3.41)

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_b)\mathrm{d}m + \boldsymbol{\rho}_d \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_d) m_d = \mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{12.42}$$

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_b)] + \boldsymbol{\rho}_d \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_d)] = \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{12.43}$$

则有

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\rho}_d \times (\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathring{\boldsymbol{\eta}}) m_d = \boldsymbol{M} \tag{12.44}$$

式中，$\mathbb{J}$ 是分量为式(12.37) 的惯量并矢，$\boldsymbol{M}$ 是作用力矩，这里只考虑重力梯度力矩。和式(11.16) 相比，由于阻尼器的存在，使姿态动力学方程式中多出了与活塞质量 m_d 有关的项。若以式(10.21) 为 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量，其他矢量的分量形式如本节前面所述，代入式(12.44)，如认为姿态角、角速度和角加速度及 η 及其一、二阶时间导数为小量，并略去二阶小量后，得

$$J_x\ddot{\varphi} + (J_y - J_x - J_z)\omega_0\dot{\psi} + (J_y - J_z)\omega_0^2\varphi = M_x \tag{12.45a}$$

$$J_y\ddot{\vartheta} = M_y \tag{12.45b}$$

$$J_z\ddot{\psi} - (J_y - J_x - J_z)\omega_0\dot{\varphi} + (J_y - J_x)\omega_0^2\psi + m_d l(\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta) = M_z \tag{12.45c}$$

上述三方程式中，共有四个变量，还应再寻找一新的关系式，这就是活塞的运动方程式。如果把活塞从飞行器中取出(图 12.7b)，其上作用有弹簧和阻尼阀的力 $-k_d\boldsymbol{\eta}$ 和 $-C_d\mathring{\boldsymbol{\eta}}$，以及飞行器通过油缸壁传给活塞的力 $\boldsymbol{F}$。这里 k_d 是弹簧的刚度，C_d 是阻尼器粘性系数，$\mathring{\boldsymbol{\eta}}$ 是对 B 体的相对时间导数，而 $\boldsymbol{F}$ 是与活塞运动方向 $\boldsymbol{\eta}$ 垂直的约束力。活塞的运动方程式，可从力平衡条件获得，它是

$$m_d \ddot{\boldsymbol{\rho}}_d = -C_d \mathring{\boldsymbol{\eta}} - k_d \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{F}$$

从式(12.39)求出 $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_d$,代入上式,有

$$m_d[\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathring{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_d + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_d)] + C_d \mathring{\boldsymbol{\eta}} + k_d \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{F} \tag{12.46}$$

把有关矢量的分量形式代入后,Oy 方向的分量式是

$$m_d \ddot{\eta} + C_d \dot{\eta} + k_d \eta + m_d l(\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi) = 0 \tag{12.47}$$

式(12.45)加式(12.47)是需用的全部动力学方程式。

式(12.45)右端的力矩可从式(12.9)和式(12.10)求得,代入后成为

$$J_x \ddot{\varphi} + (J_y - J_x - J_z)\omega_0 \dot{\psi} + 4(J_y - J_z)\omega_0^2 \varphi = 0 \tag{12.48a}$$

$$J_y \ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2 (J_x - J_z)\vartheta = 0 \tag{12.48b}$$

$$J_z \ddot{\psi} - (J_y - J_x - J_z)\omega_0 \dot{\varphi} + (J_y - J_x)\omega_0^2 \psi + m_d l(\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta) = 0 \tag{12.48c}$$

式(12.48b)只与俯仰运动有关,和前节一样,由俯仰方程式,可知稳定条件是

$$J_x > J_z \tag{12.49}$$

式(12.48)另两式和式(12.47),还可以改写为

$$\underline{m}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + (\underline{G} + \underline{D})\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \underline{K}\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.50}$$

其中

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & m_d l \\ 0 & m_d l & m_d \end{bmatrix} = \underline{m}^{\mathrm{T}}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -(J_x - J_y + J_z)\omega_0 & 0 \\ (J_x - J_y + J_z)\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\underline{G}^{\mathrm{T}}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_d \end{bmatrix} = \underline{D}^{\mathrm{T}}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 4(J_y - J_z)\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & (J_y - J_x)\omega_0^2 & m_d l \omega_0^2 \\ 0 & m_d l \omega_0^2 & k_d \end{bmatrix} = \underline{K}^{\mathrm{T}} \tag{12.51}$$

按附录9.8和9.9定理的要求,系统稳定的充分条件是 $\underline{M}, \underline{K} > 0$。显然,如 $\underline{M}$ 正定,必有

$$J_y > m_d l^2 \tag{12.52}$$

由式(12.36)易知,满足上式是必然的。而由 $\underline{K} > 0$,可得

$$J_y > J_z, J_y > J_x \tag{12.53}$$

和

$$J_y - J_x > \frac{m_d^2 l^2 \omega_0^2}{k_d} \tag{12.54}$$

式(12.53)要求俯仰轴必需是最大惯性轴,这和前面所得结论是一致的;式(12.54)则说明了弹簧刚度和活塞参数与飞行器转动惯量间的关系。

按附录9.8定理的要求,还应该有 $\underline{D} > 0$,事实上这个条件并不成立。这就要求我们再应用附录9.9定理,但由于系统维数较高,这样做比较繁琐,最好还是应用附录7中的稳定性的判据。

对式(12.50)取拉氏变换,得

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4k_x\omega_0^2 & -(1-k_x)\omega_0 s & 0 \\ (1-k_z)\omega_0 s & s^2 + k_z\omega_0^2 & \dfrac{m_d}{J_z}(s^2+\omega_0^2) \\ 0 & l(s^2+\omega_0^2) & s^2 + 2\omega_d\zeta s + \omega_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} = 0 \qquad (12.55)$$

其中,ω_d 是活塞的自振频率,ζ 是阻尼器的阻尼比。

$$\omega_d = \left(\frac{k_d}{m_d}\right)^{1/2}, \zeta = \frac{C_d}{2\omega_d m_d} \qquad (12.56)$$

从式(12.55)可求得系统的特征方程式

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (12.57)$$

再定义 $\hat{\omega}_d = \omega_d/\omega_0$ 和 $\hat{I}_d = \dfrac{m_d l^2}{J_z}$,式中的系数可写为

$$\begin{aligned} a_6 &= 1 - \hat{I}_d \\ a_5 &= 2\omega_0\hat{\omega}_d\zeta \\ a_4 &= \omega_0^2[1 + 3k_x + k_x k_z + \hat{\omega}_d^2 - 2(2k_x+1)\hat{I}_d] \\ a_3 &= 2\omega_0^3\hat{\omega}_d\zeta(1 + 3k_x + k_x k_z) \\ a_2 &= \omega_0^4[(1 + 3k_x + k_x k_z)\hat{\omega}_d^2 + 4k_x k_z - (1+8k_x)\hat{I}_d] \\ a_1 &= 8k_x k_z\omega_0^5\hat{\omega}_d\zeta \\ a_0 &= 4\omega_0^6(k_z\hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_d)k_x \end{aligned} \qquad (12.58)$$

根据附录7,对于6阶系统,稳定条件可以取为

$$a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0 \qquad (12.59)$$

其中 $a_5 > 0$ 是自然满足的,而由 $a_3, a_1, a_0 > 0$,得

$$1 + 3k_x + k_x k_z > 0 \qquad (12.60)$$

$$k_x k_z > 0 \qquad (12.61)$$

$$k_z\hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_d > 0 \qquad (12.62)$$

从式(12.61)分析,k_x 和 k_z 应同时大于或小于零,但考虑到式(12.53)和 k_x, k_z 的定义式(12.14),可知只有

$$k_x > 0, k_z > 0 \qquad (12.63)$$

成立,这时式(12.60)将自动被满足。最后,可以验证式(12.62)就是式(12.54)。所以,至此我们已获得的稳定性判据仍只有三个式,即式(12.49),式(12.61)和式(12.62)。根据这三个条件绘出的稳定域如图12.8所示。与图12.3和图12.6相比,稳定域又缩小了一些。然而我们还未分析式(12.59)中的另两个稳定条件 $\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0$。

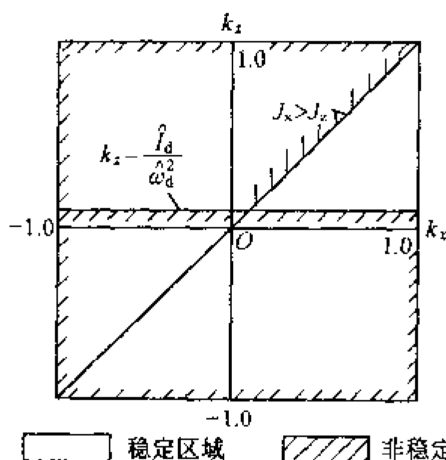


图 12.8 带阻尼器圆轨道重力梯度稳定飞行器的稳定域划分

由附录 7 知

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ a_6 & a_4 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \tag{12.64}$$

把 $a_0, a_1, \cdots, a_6$ 的表达式(12.58)代入,利用行列式运算法则把式(12.64)展开,经过化简得

$$\Delta_3 = 4\hat{I}_d\zeta^2 k_x(k_z - 1)[k_x(3 + k_z) - 4]\omega_0^6\hat{\omega}_d^2 \tag{12.65}$$

$$\Delta_6 = 288\hat{I}_d\zeta^3 k_z^3(k_x - 1)(k_z - 1)^3\omega_0^{15}\hat{\omega}_d^3 \tag{12.66}$$

前已求得只当 $k_x > 0$ 和 $k_z > 0$ 时,运动才是稳定的(见式(12.63)),我们还知道 $|k_x| \leqslant 1$ 和 $|k_z| \leqslant 1$,因此,式(12.65)和式(12.66)显然是大于和等于零的。这就使 $\Delta_3 > 0$ 和 $\Delta_5 > 0$ 的条件被自动满足,因此,图 12.8 是判断带有阻尼器重力梯度力矩稳定卫星稳定与否的最终区域划分图。

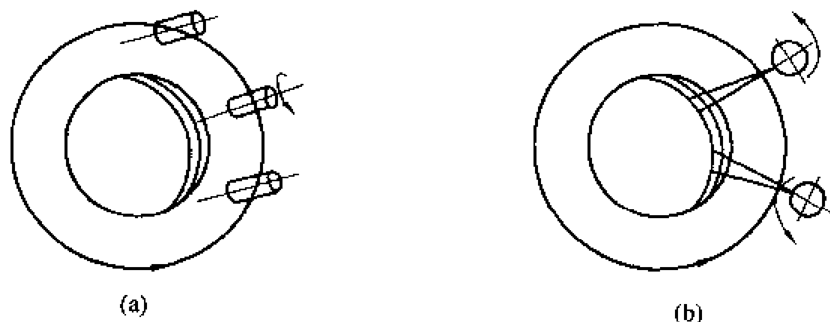
在结束本节时需要着重指出的是,比较图 12.8 和图 12.3,易知增加了阻尼器之后 k_x 和 k_z 参数图中的稳定域变狭了,自然会产生一个问题,为什么还要设置阻尼器。要回答此问题,得返回 12.2 节,证明了系统的特征根是共轭虚数,其实部为零。这就意味着系统的解是由正和余弦函数构成的,是一种李亚普诺夫意义的稳定,其幅值永不衰减。这对于要求固定指向的空间飞行器是不利或不能工作的。增加了阻尼器之后,由于有了阻尼项 $C_d\dot{\eta}$,使稳定过程成为渐近型,逐渐趋近于确切的稳定值,大大改善了飞行器的工作条件。诚然,任何空间飞行器都有能耗,然而由于数值很小,让飞行器振幅衰减到能接受的程度,需时很长,而增设阻尼器之后,衰减时间可大大缩减。

还应提及的是,从式(12.4)可以看出,重力梯度力矩既是姿态运动的函数(α_1, α_2 和 α_3 的影响),又与轨道运动(轨道半径 R)有关,因此姿态和轨道运动相互耦合着,但为了分析上的便利,我们假设了圆轨道,使它们解耦。另外,地球的位函数,是一个与经纬度都有关的复杂函数(见本书第一篇),所以精确求解姿态运动,还得考虑这种影响。

第十三章　单自旋空间飞行器

众所周知，当某个物体旋转时，会产生一种陀螺效应，这一重要特性能用在不以外力作用，保持物体旋转轴在惯性空间的方向。这个特性经常被用来保持空间飞行器的指向不变，或防止其在轨道上翻滚，这就是自旋稳定空间飞行器。它的优点是控制简单，抗干扰能力强。

常见的单自旋稳定卫星有如图 13.1 所示的两类：图(a) 的自旋轴位于轨道平面中，轨道飞行中的部分时间自旋轴指向地球，可用来进行观察和探测；图(b) 是自旋轴与轨道平面垂直的情况，安装在卫星上的仪器，在飞行器自转的每一周都有一段时间可对中心星体进行观测。



(a)　　　　(b)

图 13.1　单自旋稳定卫星

13.1　轴对称空间飞行器的自由转动特性

这里的空间飞行器被假设为刚体，它们的结构材料是那些相互之间只有力的联系而无任何相对运动的物质，即刚体材料。换言之它们在外力作用下只产生整体运动，而没有弹性或塑性变形，因此也不会给运动带来能量耗损。这种材料制成的空间飞行器，被称为刚性的或刚体的，简称为刚体。

刚体的旋转和平移相比，有很多差异，自由转动中的章动就是其一。为了使问题简化，我们先分析几何形状为轴对称体的均质空间飞行器的旋转。设空间飞行器如图 13.2，$Ox_by_bz_b$ 是和刚体空间飞行器一同旋转的体固联坐标系，O 是质心，三根坐标轴都是主惯性轴，且有 $J_x = J_y = J_t, J_z = J$。设 $Oxyz$ 是不旋转的空间飞行器坐标系，在 $t = 0$ 时，$Ox_by_bz_b$ 与 $Oxyz$ 重合，此后 $Ox_by_bz_b$ 以角速角 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕 Oz(Oz_b 轴) 旋转，转角为 Ωt，在整个旋转过程中 Oz 和 Oz_b 一直重合。根据式(11.19)，自旋空间飞行器姿态运动方程式，在 $Ox_by_bz_b$ 中的分量形式是

$$J_t\dot{\omega}_{bx} - (J_t - J)\omega_{by}\omega_{bz} = 0 \tag{13.1a}$$

$$J_t\dot{\omega}_{by} - (J - J_t)\omega_{bz}\omega_{bx} = 0 \tag{13.1b}$$

$$J\dot{\omega}_{bz} = 0 \tag{13.1c}$$

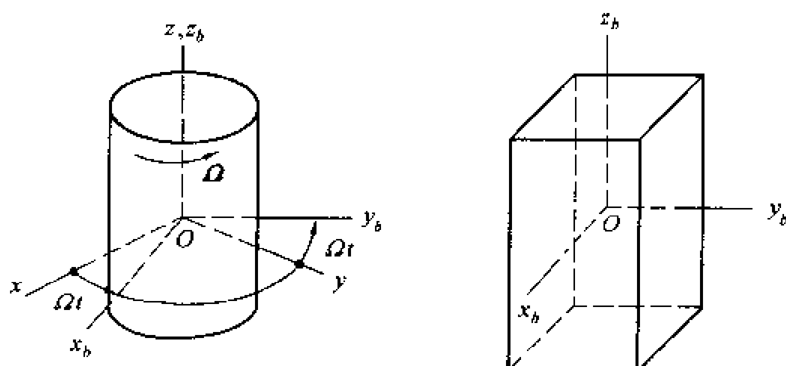


图 13.2　轴对称的空间飞行器

由式(13.1c) 可以求得

$$\omega_{bz} = \Omega = \text{const} \tag{13.2}$$

把它代入式(13.1a) 和式(13.1b),有

$$\dot{\omega}_{bx} + \omega_p \omega_{by} = 0 \tag{13.3a}$$

$$\dot{\omega}_{by} - \omega_p \omega_{bx} = 0 \tag{13.3b}$$

其中

$$\omega_p = \frac{J - J_t}{J_t}\Omega = \text{const} \tag{13.4}$$

从式(13.3) 两式分别求得 ω_{bx} 和 ω_{by},再代入另一式,得

$$\ddot{\omega}_{bx} + \omega_p^2 \omega_{bx} = 0 \tag{13.5a}$$

$$\ddot{\omega}_{by} + \omega_p^2 \omega_{by} = 0 \tag{13.5b}$$

这是关于 ω_{bx} 和 ω_{by} 的二阶常系数微分方程式,它们的解是

$$\omega_{bx} = A\cos\omega_p t + B\sin\omega_p t$$

$$\omega_{by} = C\cos\omega_p t + D\sin\omega_p t$$

其中,A,B,C,D 是积分常数,应由初始条件确定。若把 $t = 0$ 时刻的 $\omega_{bx} = \omega_{bx}(0)$ 和 $\omega_{by} = \omega_{by}(0)$ 代人,可得

$$\omega_{bx}(0) = A,\ \omega_{by}(0) = C$$

把它们代人上述解,再利用式(13.3),经过推演,还可求得

$$B = -\omega_{by}(0),\ D = \omega_{bx}(0)$$

把积分常数代回原解,得

$$\omega_{bx} = \omega_{bx}(0)\cos\omega_p t - \omega_{by}(0)\sin\omega_p t$$

$$\omega_{by} = \omega_{by}(0)\cos\omega_p t + \omega_{bx}(0)\sin\omega_p t$$

若把 Ox_by_b 视为复平面,并令 Oy_b 为虚轴,$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,取 $\omega_t = \omega_{bx} + \mathrm{i}\omega_{by}$,则将上两式代人之后有

$$\omega_t = [\omega_{bx}(0) + \mathrm{i}\omega_{by}(0)](\cos\omega_p t + \mathrm{i}\sin\omega_p t) = [\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t} = \omega_{t0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t} \tag{13.6}$$

式(13.6) 中

$$\omega_{t0} = [\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2} = \text{const} \tag{13.7}$$

式(13.6)表示的几何意义是(见图 13.3),由 ω_{bx} 和 ω_{by} 按几何和构成的 ω_t 角速度,与 Oz_b 轴垂直,故又称横向角速度,它是一个等幅角速度 ω_{t0} 的旋转运动,而 ω_t 的旋转方向在体坐标系中不停地以 ω_p 绕 Oz_b 轴转动。形式上,从式(13.6)看,ω_t 是以正 ω_p 绕 Oz_b 轴转动的,但真实情况还要看 ω_p 取正或负值。当 $J_t > J$,即空间飞行器横轴的转动惯量大于纵轴的时候,由式(13.4)知 $\omega_p < 0$,则 ω_t 将以 $\boldsymbol{\Omega}$ 的反方向运动;反之,当 $J_t < J$,即空间飞行器横轴转动惯量小于纵轴的时候,$\omega_p > 0$,则 ω_t 将以 $\boldsymbol{\Omega}$ 正方向旋转。这里应注意的是,$Ox_by_bz_b$ 是随着飞行器在惯性空间的以 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的,而 $\boldsymbol{\omega}_t$ 又绕 Oz_b 轴以 ω_p 旋转,所以 ω_p 可被看成是一种对刚体空间飞行器的相对转动,又称**本体章动角速度**,由 $\boldsymbol{\omega}_t$ 引起的运动称为**章动**。这时的刚体既以 $\boldsymbol{\Omega}$ 自旋,又参加 $\boldsymbol{\omega}_t$ 转动,它的绝对角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\Omega} \tag{13.8}$$

是横向角速度 $\boldsymbol{\omega}_t$ 和纵向角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 之和(图 13.4)。而且合角速度的模量

$$\omega = [\omega_t^2 + \Omega^2]^{1/2} = \text{const} \tag{13.9}$$

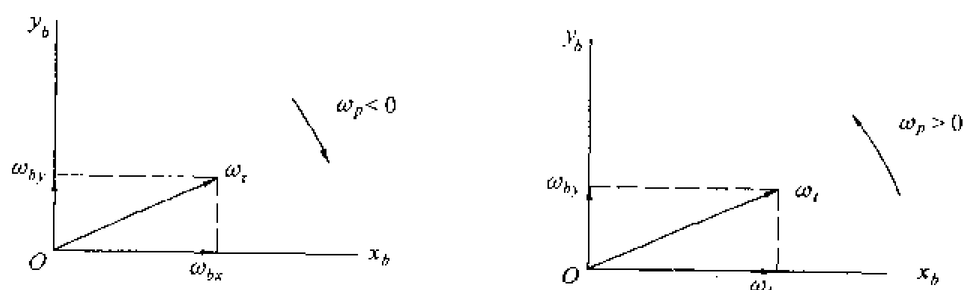


图 13.3 $\omega_t = \omega_{bx} + i\omega_{by}$ 的几何解释

显然 $\boldsymbol{\omega}_t$,$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$(即 Oz_b 轴)是共面的,称为纵向平面。根据式(13.6),纵向平面以 ω_p 角速度绕 Oz_b 相对刚体空间飞行器作相对旋转,在转动过程中 $\boldsymbol{\omega}$ 形成一绕 Oz_b 轴的锥面(又称**本体锥**),其锥顶角 ζ 满足

$$\text{tg}\,\zeta = \frac{\omega_t}{\Omega} = \frac{[\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2}}{\Omega} = \text{const} \tag{13.10}$$

由于角速度已被划分为横向和纵向两分量,角动量也可分为横向角动量 $J_t\boldsymbol{\omega}_t$ 和纵向角动量 $J\boldsymbol{\Omega}$,因此总的角动量是

$$\boldsymbol{h} = J_t\boldsymbol{\omega}_t + J\boldsymbol{\Omega} \tag{13.11}$$

或

$$h = [(J_t\omega_t)^2 + (J\Omega)^2]^{1/2} = \text{const} \tag{13.12}$$

它与 Oz_b 轴的交角是 ϕ,称为章动角

$$\text{tg}\,\phi = \frac{J_t\omega_t}{J\Omega} = \frac{J_t[\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2}}{J\Omega} = \text{const} \tag{13.13}$$

由式(13.11)还可推知 Oz_b 轴和 $\boldsymbol{\omega}_t$ 及 $\boldsymbol{h}$ 共面,这个平面就是前面提到的纵平面(见图 13.5)。

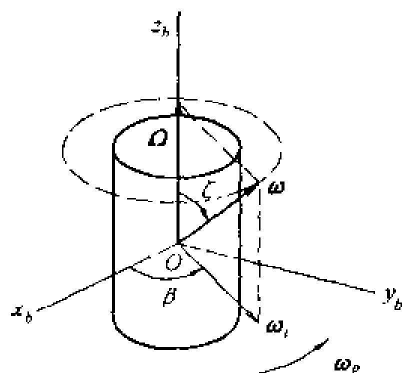


图 13.4 和角速度绕 Oz_b 轴形成一个圆锥(本体锥)

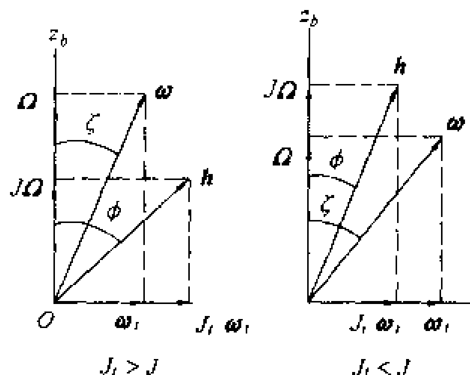


图 13.5 Oz_b 轴和 ω 和 h 构成以 ω_p 旋转的平面

把上面的分析联系起来，进一步推论刚体运动的景象。先分析 $J_t > J$ 的情况。根据动量矩守恒的原理，h 应在惯性空间方向和大小不变，纵平面只能绕 h 旋转。旋转的结果，ω 绕 h 将构成一个锥体(图 13.6)，称**空间锥**。把本体锥也绘于图上，这两个锥将沿 ω 相切。刚体以 ω 相对惯性空间的运动，就成为本体锥无滑动地相对空间锥的转动。空间锥的锥顶角为 $\phi - \zeta$，它在惯性空间中固定不动。这就是对称刚体有章动时的自由旋转形态。

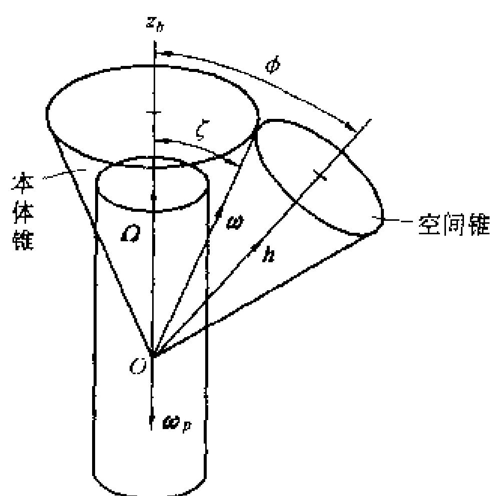


图 13.6 空间锥与本体锥的啮合滚动运动，$J_t > J$

图 13.6 的分析是在 $J_t > J$ 的前提下得到的，当 $J_t < J$ 时，除了 ω_p 变号使纵向平面反向绕 Oz_b 轴旋转外，也使纵向平面中 h 比 ω 更靠近 Oz_b 轴(即 $\phi < \zeta$)。图 13.7 是 $J_t < J$ 的对称刚体自由转动的情形，和图 13.6 一样，h 在惯性空间不动，ω 围绕它形成一个在惯性空间固定的空间锥，它和 ω 绕 Oz_b 轴旋转而成的本体锥相切，其公切线就是 ω。它和图 13.6 的不同处，是以本体锥的内表面啮合代替了外啮合。假如两种情况下刚体都是朝同一方向旋转，本体锥绕空间锥的转动方向却是相反的，此时包含着 Oz_b 轴，h 和 ω 的纵平面相对 $Ox_by_bz_b$ 的旋转方向也是互异的，这些都是由于 $J_t - J$ 符号不同造成的结果。

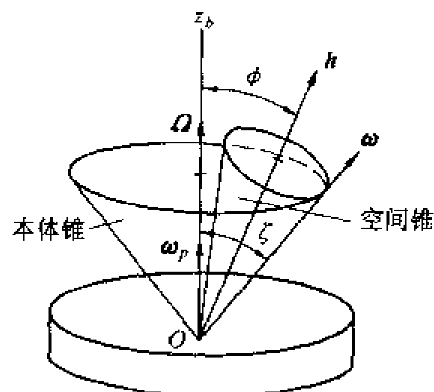


图 13.7 空间锥和本体锥的啮合滚动，$J_t < J$

让空间飞行器绕对称轴 Oz_b 旋转，依靠陀螺转子定向性的特点来保持飞行器在空间

指向稳定，乃是我们的初衷。然而，通过上述分析发现，只要存在着横轴的初始干扰 $\omega_{bx}(0)$ 和 $\omega_{by}(0)$ 或其他扰动，上面描述的两锥的滚动运动就不可避免。

通过上面分析，我们已经有了四个角速度：$\boldsymbol{\Omega}$、$\boldsymbol{\omega}_t$、$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$。显然前三者被式(13.8)联系着，即

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_t \tag{13.14}$$

它们惟一地描述了刚体自由转动。那么，第四个角速度 $\boldsymbol{\omega}_p$ 又与这惟一的 $\boldsymbol{\omega}$ 转动有何关系呢？只要把注意力放在图 13.6 和图 13.7 所描述的锥体滚动就不难找到答案。既然，两锥的无滑滚动可以描述本节的拐体自由旋转，而锥的无滑滚动又可以分解为刚体相对纵平面和纵平面相对惯性空间（空间锥）两运动。纵平面相对刚体以 $\boldsymbol{\omega}_p$ 转动，刚体对纵平面的角速度便是 $-\boldsymbol{\omega}_p$，若设纵平面相对惯性空间的角速度是 $\boldsymbol{\omega}_n$，显然应有

$$\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n \tag{13.15}$$

从图 13.8 不难推出 $\boldsymbol{\omega}_n$ 的大小和方向。图中由 Oz_b 轴($\boldsymbol{\Omega}$)，$\boldsymbol{\omega}_t$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 构成纵平面，$\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_t$ 分别是矩形的两边，$\boldsymbol{\omega}$ 为其对角线。$-\boldsymbol{\omega}_p$ 应与 Oz_b 轴一致，但其方向取决于式(13.4)。自 $-\boldsymbol{\omega}_p$ 向 $\boldsymbol{\omega}$ 引矢端矢量，便是 $\boldsymbol{\omega}_n$，因为它满足式(13.15)的要求。由图 13.8 可求得 $\boldsymbol{\omega}_n$ 的模

$$\omega_n = [(\Omega + \omega_p)^2 + \omega_t^2]^{1/2}$$

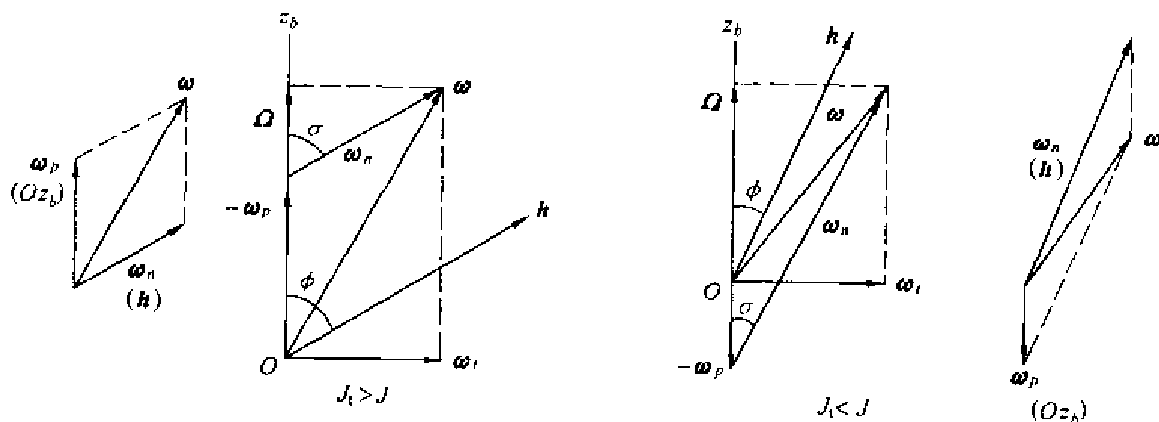


图 13.8　本体章动角速度和惯性章动角速度

把式(13.4)代入上式，并考虑到式(13.12)，得

$$\omega_n = \frac{h}{J_t} \tag{13.16}$$

还可求得

$$\tan\sigma = \frac{\omega_t}{\Omega + \omega_p} = \frac{J_t\omega_t}{J\Omega} \tag{13.17}$$

与式(13.13)相比显然有 $\phi = \sigma$ 的关系，即 $\boldsymbol{\omega}_n$ 应与 $\boldsymbol{h}$ 平行。

由于 $\boldsymbol{\omega}_n$ 是纵平面(Oz_b 轴)相对空间锥（惯性空间）的角速度，又称为**惯性章动角速度**。

通过上述分析易知，从运动学观点分析，对称刚体的自由旋转，既可被视为纵向和横

向角速度之和 $\boldsymbol{\omega}_t+\boldsymbol{\Omega}$；又可当成本体和惯性章动角速度之和 $-\boldsymbol{\omega}_p+\boldsymbol{\omega}_n$。这一特性后面还会用到。

13.2　一般空间飞行器的自由转动

如果放弃前节 $J_x=J_y=J_t$ 的假设，表示空间飞行器中没有对称轴，是一般意义的飞行器，但仍认为 $Ox_by_bz_b$ 是它的主惯性轴，则欧拉方程应取式(11.19)，只是其右侧为零

$$J_x\dot{\omega}_{bx}-(J_y-J_z)\omega_{by}\omega_{bz}=0 \tag{13.18a}$$

$$J_y\dot{\omega}_{by}-(J_z-J_x)\omega_{bz}\omega_{bx}=0 \tag{13.18b}$$

$$J_z\dot{\omega}_{bz}-(J_x-J_y)\omega_{bx}\omega_{by}=0 \tag{13.18c}$$

将上面的式(13.18a)乘 ω_{bx}，式(13.18b)乘 ω_{by}，而式(13.18c)乘 ω_{bz} 后，再相加，积分后求得(为了方便，下面略去表示体固联系的下标 b)

$$J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2=\text{const}$$

与式(11.7)相比知此式是主惯性轴坐标系内的转动动能 T 的两倍，所以有

$$J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2=2T \tag{13.19}$$

再把式(13.18a)、式(13.18b)、式(13.18c)分别乘以 $J_x\omega_x$、$J_y\omega_y$、$J_z\omega_z$ 后相加并积分，所得结果与式(11.11)比较后，得

$$J_x^2\omega_x^2+J_y^2\omega_y^2+J_z^2\omega_z^2=h^2 \tag{13.20}$$

即惯性积为零时总动量矩 h 的平方。动能 T 和动量矩 h 都应守恒，其模的数值大小取决于 ω_x、ω_y 和 ω_z 的初始条件。

式(13.19)和式(13.20)表明刚体的自由转动应服从于这两式所要求的角速度之间的关系。若以 ω_x、ω_y 和 ω_z 分别为空间直角坐标系的轴，则式(13.19)和式(13.20)表示的是能量椭球和动量矩椭球，它们在 ω_x、ω_y 和 ω_z 轴上的截矩分别是

$$\left(\frac{2T}{J_x}\right)^{1/2},\left(\frac{2T}{J_y}\right)^{1/2}\text{和}\left(\frac{2T}{J_z}\right)^{1/2};\left(\frac{h}{J_x}\right),\left(\frac{h}{J_y}\right)\text{和}\left(\frac{h}{J_z}\right) \tag{13.21}$$

即都与对应轴的转动惯量成反比。自由转动问题的解既然要同时满足式(13.19)和式(13.20)，其解应是这两椭球表面的交线(图 13.9)。这条交线又称为**本体极迹**，以本体极迹上任意点为矢端至坐标原点的矢量表示刚体自由旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$，其坐标是 ω_x，ω_y 和 ω_z 它随着时间的增加而沿着本体极迹运动。若转动惯量不变而改变总能量，将得到在动量椭球上的一族本体极迹(图 13.10)，它描述了相应刚体的所有可能的自由转动运动。图示 $J_x>J_y>J_z$ 的情况，本体极迹分为四个区，它们分别围绕着 ω_x 和 ω_z 轴，而被过 ω_y 轴的两条极迹所分割，后者被称为**边界极迹**。如果令

$$J=\frac{h^2}{2T} \tag{13.22}$$

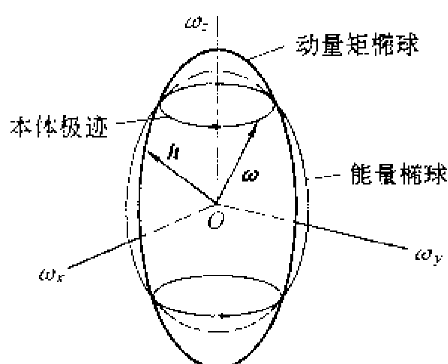


图 13.9　能量和动量椭球的交线本体极迹曲线

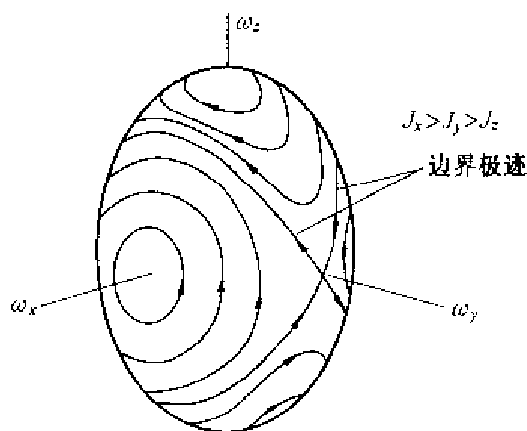


图 13.10　不同能量时的本体极迹族

(J 的因次与转动惯量同),工作极迹落入某区的条件是:当 $J_x \geqslant J > J_y$ 时(即 $h^2 > 2\mathrm{T}J_y$),落入围绕 ω_x 轴的区域;当 $J_y \geqslant J > J_z$(即 $h^2 < 2\mathrm{T}J_y$),落入围绕 ω_z 的区域;而当 $J = J_y$(即 $h^2 = 2\mathrm{T}J_y$),在边界极迹上。

1834 年 Poinsot 对刚体的自由转动做出了几何解释。他的结论是,刚体的自由转动可以被看成是中心被固定的能量椭球对另一固定平面的无滑动的滚动过程。能量椭球的中心至固定平面的距离是$\dfrac{2T}{h}$,且固定平面与 $\boldsymbol{h}$ 垂直(图 13.11)。

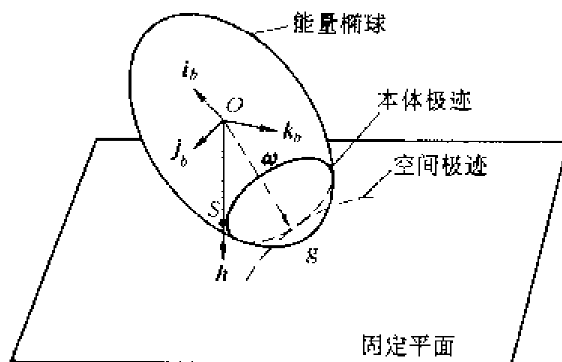


图 13.11　能量椭球在固定平面上的无滑动滚动

下面对这种几何模型加以说明。首先,固定平面与能量椭球切于 g 点,自 O 至 g 的矢量表示 $\boldsymbol{\omega}(t)$,它的三个分量 ω_x,ω_y 和 ω_z 符合式(13.19)。由于切点角速度分量惟一,如果再满足第二个积分式(13.20),这个模型就是正确的了。根据几何学对平面的描述,其方程可写成

$$lx_b + my_b + nz_b = p \tag{13.23}$$

的形式,其中的 l,m 和 n 应是平面法线对 x_b,y_b 和 z_b 轴的方向余弦,而 p 是原点到平面垂直线 OS 的长度。固定平面垂直于 $\boldsymbol{h}$,其法线应与 $\boldsymbol{h}$ 平行,所以方向余弦是 $J_x\omega_x$,$J_y\omega_y$ 和 $J_z\omega_z$。而由于 O 点固定,它到固定平面的距离也就是不变的,其长度是 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $\boldsymbol{h}$ 方向的投影,即 $\boldsymbol{\omega}\cdot\dfrac{\boldsymbol{h}}{h}$。考虑到 $\boldsymbol{h} = J_x\omega_x\boldsymbol{i} + J_y\omega_y\boldsymbol{j} + J_z\omega_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$,以及式(13.19),得 $p = \dfrac{2T}{h}$,正好是绘制图 13.11 的基本条件。恰说明 g 点的三个角速度分量形成的角动量,符合式(13.20) 的要求。于是证明了 Poinsot 几何模型是正确描述了刚体自由转动的一般情况。

转动过程中,切点 g 在能量椭球上的轨迹就是**本体极迹**,切点在固定平面上的轨迹则

称为**空间极迹**。本体极迹和图 13.10 中的完全一致，空间极迹是一个新概念。考虑到 ω_x，ω_y 和 ω_z 的方向实际就是体固联系 $Ox_by_bz_b$ 三基矢 $\boldsymbol{i}_b$，$\boldsymbol{j}_b$，$\boldsymbol{k}_b$，的方向，就不难理解，本体极迹和空间极迹实际上描述了刚体自由旋转运动在 $Ox_by_bz_b$ 坐标系和惯性坐标系中的运动规律。

13.3　绕惯性主轴旋转的稳定性

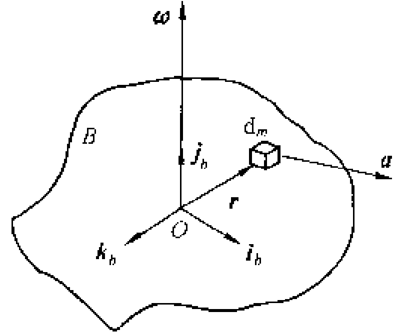


图 13.12　绕某一轴旋转时的惯性力矩

首先说明，如果坐标系是非主惯性系，不论绕哪一根轴自由旋转，运动都不是稳定的。图 13.12 中 B 是一个刚体，基矢 $\underline{\boldsymbol{e}}_b = [\boldsymbol{i}_b \quad \boldsymbol{j}_b \quad \boldsymbol{k}_b]^{\mathrm{T}}$ 表示非主惯性轴的方向，那么惯性并矢的非对角线元素就不是零。若刚体绕该系某坐标轴等速旋转，其上 $\mathrm{d}m$ 微元质量的加速度是(见式(11.14)) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$，其中 $\boldsymbol{a}_0$ 是 O 点加速度。$\mathrm{d}m$ 的惯性力是 $\boldsymbol{a}\mathrm{d}m$，而绕 O 点的惯性力矩是

$$\int_B \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}\mathrm{d}m = \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{a}_0 m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

式中，m 是 B 刚体的质量，$\boldsymbol{r}_c$ 是自 O 点至质心的矢距。不失一般性，设 O 为质心($\boldsymbol{r}_c = 0$)和 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{j}_b$ 重合，并考虑到式(附 3.11)，上式成为

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \underline{\boldsymbol{e}}_b^{\mathrm{T}} \underline{\omega}^{\times} \mathbb{J} \underline{\omega} = \underline{\boldsymbol{e}}_b^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} = -J_{yz}\omega^2 \boldsymbol{i}_b + J_{xy}\omega^2 \boldsymbol{k}_b$$

说明绕 $\boldsymbol{i}_b$ 和 $\boldsymbol{k}_b$ 矢量方向有惯性力矩，这个力矩将使绕 $\boldsymbol{j}_b$ 的自由转动成为不稳。

所以，刚体绕非惯性主轴的无力矩自由旋转是不稳定的。那么绕惯性主轴的旋转又是怎样的?由上式易知对于绕惯性主轴等速自由旋转的刚体，对任何轴的惯性力矩都是零，似乎答案应是肯定的。然而运动稳定与否，不仅看在该点的运动情况(是否平衡)，还要看在小扰动的作用下，使运动偏离该点后，其状态是返回到原态还是继续偏离。能返回或趋近原态，或以小幅绕原态摆动的才是稳定。

根据这个原则，我们研究绕主轴的刚体旋转运动。设刚体空间飞行器绕 $\boldsymbol{j}_b$ 基矢旋转，角速度为 Ω。换言之正常状态时应有 $\omega_{by} = \Omega$，$\omega_{bx} = \omega_{bz} = 0$。如果受到扰动便有 $\omega_{by} = \Omega + \delta\omega_{by}$，$\omega_{bx} = \delta\omega_{bx}$ 和 $\omega_{bz} = \delta\omega_{bz}$，把它们代入式(11.19)(为了简便，把下标 b 略去)，有

$$J_x\delta\dot{\omega}_x - (J_y - J_z)(\Omega + \delta\omega_y)\delta\omega_z = 0$$

$$J_y\delta\dot{\omega}_y - (J_z - J_x)\delta\omega_z\delta\omega_x = 0$$

$$J_z\delta\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)(\Omega + \delta\omega_y)\delta\omega_x = 0$$

若认为 $\delta\omega_x$，$\delta\omega_y$ 和 $\delta\omega_z$ 是一阶小量，并略去二阶以上小量，便有

$$\delta\dot{\omega}_x - \frac{(J_y - J_z)}{J_x}\Omega\delta\omega_z = 0$$

$$J_y\delta\dot{\omega}_y = 0$$

$$\delta\dot{\omega}_z + \frac{J_y - J_x}{J_z}\Omega\delta\omega_x = 0$$

第二式表示$\delta\omega_y = \text{const}$，而第一和第三式相互耦合。如果分别从第一和第三式求出$\delta\omega_z$和$\delta\omega_y$并代入另一式，就得到

$$\delta\ddot{\omega}_y + \omega_p^2\delta\omega_y = 0 \tag{13.24a}$$

$$\delta\ddot{\omega}_z + \omega_p^2\delta\omega_z = 0 \tag{13.24b}$$

其中

$$\omega_p^2 = \frac{(J_y - J_z)(J_y - J_x)}{J_xJ_z}\Omega^2 \tag{13.25}$$

设上两式的解为$\delta\omega_i = C_i e^{\lambda t}$，$(i = x, z)$，代入原方程，得

$$\lambda^2 + \omega_p^2 = 0$$

或

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega_p^2} \tag{13.26}$$

由此可知，如果式(13.25)右侧为负，λ将有一对正负实数解，其中的正实数解将使$\delta\omega_i = C_i e^{\lambda t}$随时间的推移而发散，刚体的转动就是不稳定的。如果式(13.25)右侧的量为正，则λ将是虚数，即$\lambda = \pm\sqrt{-1}\omega_p$，因而

$$\delta\omega_i = C_{i1}\cos\omega_p t + C_{i2}\sin\omega_p t,\ i = x, z$$

是一个小振幅的振动，按照上面的稳定定义(李亚普诺夫稳定)，刚体的运动是稳定的。其实这个结论还可以直接从附录定理9.2得到。

所以，寻求刚体自由旋转稳定的问题，变为确定

$$\frac{(J_y - J_x)(J_y - J_z)}{J_xJ_z} \tag{13.27}$$

的符号的问题。它为负运动不稳定，为正运动稳定。而上式成为正的条件是：

(1) $J_y > J_x, J_y > J_z$，即绕最大惯量轴的运动；

(2) $J_y < J_x, J_y < J_z$，即绕最小惯量轴的运动。

这就是说，刚体的无力矩自由转动，只在绕最大惯量轴和最小惯量轴时才是稳定的。

其实这个结论从图13.10也可得出。图中示出能量椭球上的本体极迹，该图是J_y为中间惯量轴的情况。本体极迹在$j_b(Oy_b$轴)点处为鞍状奇点，运动将沿着由该点出发的极迹曲线发散。所以，绕中间惯量主轴旋转的刚体，旋转运动是不稳定的，自旋稳定卫星不应绕此轴工作。

如取式(12.14)中的k_x和k_z为参数，即

$$k_x = \frac{J_y - J_z}{J_x},\quad k_z = \frac{J_y - J_x}{J_z} \tag{13.28}$$

则式(13.27)大于零的稳定条件，还可被写成

$$k_x > 0 \quad 和 \quad k_z > 0 \tag{13.29}$$

和

$$k_x < 0 \quad 和 \quad k_z < 0 \tag{13.30}$$

在以k_x和k_z分别为横纵轴的图中，式(13.29)和式(13.30)所决定的稳定区域如图13.13所示。其中第一象限是稳定域，满足式(13.29)的条件，该区域中J_y是最大惯性轴；第三象

限也是稳定域，式(13.30)被满足，俯仰轴的 J_y 是最小惯量轴。

13.4　有能量损耗的自由旋转刚体

在13.3节曾得到绕刚体的最大和最小惯性轴的转动是稳定的结论。然而问题却出现在刚体两字上。所谓刚体系指任意两微元质点之间的距离绝对不发生变化的物体，这在自然界是不存在的。自然界的物体在外力作用下其中的质点都会产生或大或小的位移，而常见的刚体只是这种位移很小而已。质点之间相对位移的结果会产生能量的耗散，后者转变成为热量而散失到空间。特别是当刚体由若干部件构成或其上带有液体容器时，部件之间或液体与容器壁，以及液体微粒之间会发生摩擦，也要耗散能量。有时我们还人为地加装耗散能量的阻尼器，它们和可挠性变形的部件，都是耗能部件。

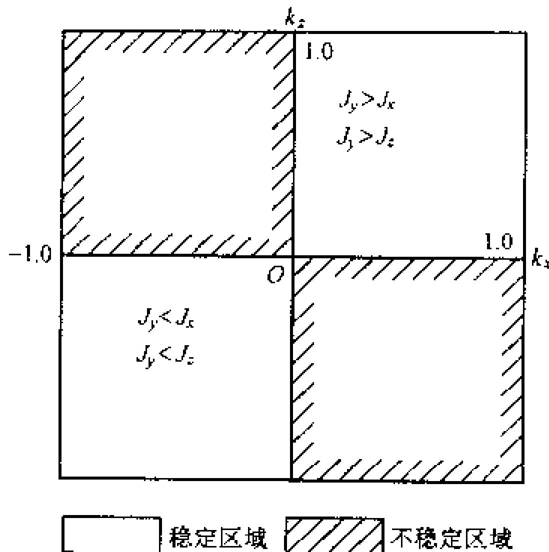


图13.13　自由转动刚体的稳定区域

当刚体中有能耗损失时，自由旋转运动的稳定轴会发生变化，这时绕最小惯量轴的旋转也变成不稳定的了。现说明如下。

对于旋转的刚体，曾求得它的能量和动量矩(见式(13.19)和式(13.20))。对于理想刚体，它们都是不变量，而当有了能耗损失时，能量 T 不再保持不变，而是逐渐减小，即

$$\dot{T} < 0 \tag{13.31}$$

然而，动量矩却仍然保持不变(因系统未作用外力)。在式(13.22)中我们曾引进 J 参量，它是动量矩和能量之比，具有和转动惯量相同的因次，在本节可以作为系统能量的度量。对式(13.22)取对数再取时间导数，得

$$\frac{\dot{J}}{J} + \frac{\dot{T}}{T} = 0 \tag{13.32}$$

由式(13.22)可推论出：J 是随着时间的推移而增加的。图13.10是假定 $J_x > J_y > J_z$ 且无能量损耗时的本体极迹族曲线，每条封闭的本体极迹都对应着一定的能量 T，而以与 ω_z 轴重合的极迹曲线(退化成 z 轴上的点)的能量最大($T = h^2/2J_z$)，与 ω_x 轴重合的极迹曲线(ω_x 轴上的交点)具有最小的能量($T = h^2/2J_x$)。换言之，对应于 ω_z 轴的极迹 J 最大，而 ω_x 轴的极迹 J 最小。如果最初时刻刚体极迹恰好在 ω_z 轴(如图13.14)，而且具有一定的能耗，则工作点将逐渐离开 ω_z 轴进入

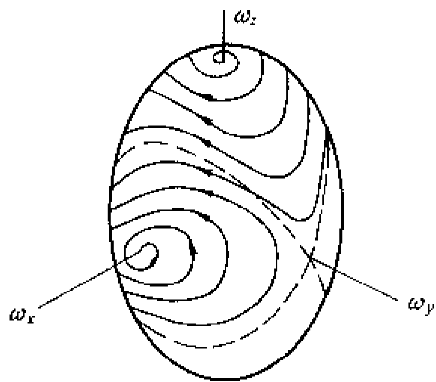


图13.14　有能量损耗时的刚体自由旋转

在ω_z轴附近的极迹曲线，因能量不断变小，极迹曲线不封闭，而是越来离ω_z轴越远。当极迹曲线与边界极迹相交后，便进入了绕ω_x轴的极迹线区域，并最终地以螺旋线形式，达到与ω_x轴重合。上述过程清楚地绘于图13.13中。当工作点到达ω_x轴之后，能量已降至给定h值允许的最小量，能量进一步的耗损，将不仅导致总能量T的减小，也会因角速度ω_x的下降使系统动量矩h变小。

通过上述叙述，可见在有能量损耗时，绕最小惯量轴的转动也是不稳定的，只有绕最大惯量轴的转动才是稳定的。在k_x-k_z图中，稳定区域的划分如图13.15所示，在真实情况中，能量损耗是不可避免的，所以我们遇到的稳定转动，将只是绕最大惯量轴的旋转运动。

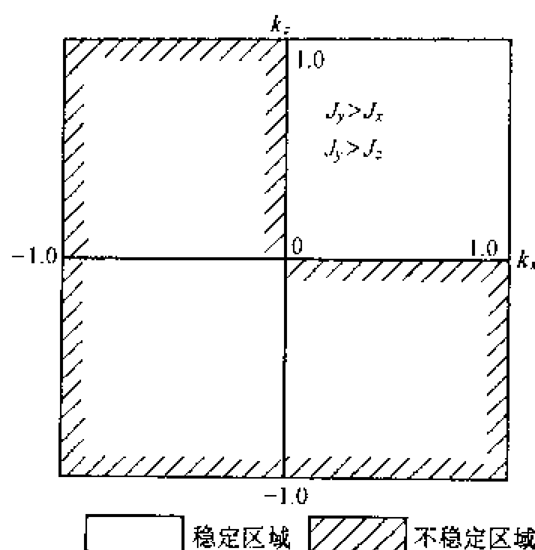


图13.15 有能量损耗时自旋稳定卫星的稳定区域划分

13.5 重力梯度力矩对单自旋空间飞行器的影响

本章前面几节都是假设空间飞行器上无外力矩的作用，这对于远离各大行星在太空中漫游或地球高轨道卫星近似真实，而对于多数地球卫星，特别是近地轨道空间飞行器却有相当的出入，主要是后面情况下卫星受到许多摄动力矩的影响，如重力梯度力矩、空气动力矩、地球势函数非球项力矩、太阳光辐射力矩、地磁场力矩等。本节将只研究重力梯度力矩的影响，这是因为它是诸多干扰力矩中数量较大的一种，而研究其他摄动力矩还需补充一些有关专门知识。

第十二章我们说明了重力梯度力矩是空间飞行器姿态参数($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\varphi,\theta,\psi$)和轨道参数($R$和$\omega_0$)的函数，因此精确求解重力梯度力矩作用下的飞行器姿态运动得考虑它的轨道飞行。但为了简单和突出重要影响参数，本节仍然假设飞行器是在圆轨道上运动，将轨道和姿态问题相互解耦，单独研究姿态运动。

先给出在圆轨道上运行的自旋飞行器的姿态动力学方程式。图13.16中B是自旋卫星，O为其质心，它在近地圆轨道上运动。$OX_oY_oZ_o$，$Oxyz$分别是轨道和飞行器坐标系，轨道坐标系以轨道角速度ω_0绕OY_o的负方向旋转，理想情况下$Oxyz$应与轨道坐标系重合。当飞行器做理想姿态运动时，只绕Oy以Ω速率旋转，因此$\omega_y=\Omega$，又因飞行器是轴对称的有$J_x=J_z=J_t$和$J_y=J$，因此，无外力作用的姿态运动方程式是(见式(11.19))

$$J_t\dot{\omega}_x-(J-J_t)\Omega\omega_z=0 \tag{13.33a}$$

$$J\dot{\omega}_y=0 \tag{13.33b}$$

$$J_t\dot{\omega}_z-(J_t-J)\Omega\omega_x=0 \tag{13.33c}$$

为了研究这种空间飞行器的稳定性问题，设在上述理想状态基础上增加一小扰动。在

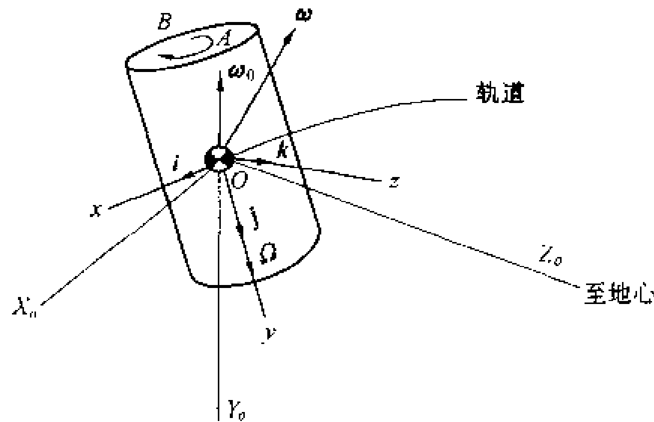


图 13.16　在圆轨道上的单自旋飞行器

小扰动作用下 $Oxyz$ 与 $OX_oY_oZ_o$ 之间出现了小的欧拉角 φ,ϑ,ψ 和欧拉角速度 $\dot{\varphi},\dot{\vartheta},\dot{\psi}$。而由 $OX_oY_oZ_o$ 向 $Oxyz$ 坐标系的变换矩阵是(见式(10.20)或式(10.25))

$$\underline{C}_{x0}=\begin{bmatrix}1 & \psi & -\vartheta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \vartheta & -\varphi & 1\end{bmatrix}\tag{13.34}$$

考虑到小角度,可以把 $\dot{\varphi},\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\psi}$ 视为 x,y 和 z 方向的角速度分量 $\delta\omega_x=\dot{\varphi},\delta\omega_y=\dot{\vartheta}$, $\delta\omega_z=\dot{\psi}$,其和速度是 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{i}+\dot{\vartheta}\boldsymbol{j}+\dot{\psi}\boldsymbol{k}$。除此之外,还存在着 $OX_oY_oZ_o$ 绕负 OY_o 方向的轨道角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 和沿 OY 的自旋速度 $\boldsymbol{\Omega}$。设总的角速度是 $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$

$$\boldsymbol{\omega}_\Sigma=\boldsymbol{\omega}^*+\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\Omega}\tag{13.35}$$

在 $Oxyz$ 坐标内其分量形式是

$$\omega_\Sigma=\underline{e}^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\vartheta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\underline{C}_{x0}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \Omega\\ 0\end{bmatrix}\right)=\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}-\omega_0\psi\\ \dot{\vartheta}-\omega_0+\Omega\\ \dot{\psi}+\omega_0\varphi\end{bmatrix}\tag{13.36}$$

考虑到 $\boldsymbol{\omega}_0$ 的方向和大小都不变,$\boldsymbol{\Omega}$ 只随 $\boldsymbol{\omega}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 改变方向,而 $\boldsymbol{\omega}$ 却是数量和方向随 $\boldsymbol{\omega}_0$ 都改变的量。因此 $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ 的时间导数是

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_\Sigma=\mathring{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\omega})\times\Omega=\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}-(\omega_0+\Omega)\dot{\psi}-\omega_0\Omega\varphi\\ \ddot{\vartheta}\\ \ddot{\psi}+(\omega_0+\Omega)\dot{\varphi}-\omega_0\Omega\psi\end{bmatrix}\tag{13.37}$$

把上述关系式代入式(11.16),便可求得本情况下的姿态动力学方程式在 $Oxyz$ 中的分量形式

$$J_t\ddot{\varphi}-[(J_t-J)\omega_0+J\Omega]\omega_0\varphi-[(2J_t-J)\omega_0+J\Omega]\dot{\psi}=M_x\tag{13.38a}$$

$$J\ddot{\vartheta}=M_y\tag{13.38b}$$

$$J_t\ddot{\psi}-[(J_t-J)\omega_0+J\Omega]\omega_0\psi+[(2J_t-J)\omega_0+J\Omega]\dot{\varphi}=M_z\tag{13.38c}$$

上式右侧的作用力矩仅考虑重力梯度影响,其表达式在小角度情况下如式(12.9)所

示。但引用之前先做一些说明。由于空间飞行器在空间自旋，其惯性主轴相对 $Oxyz$ 是转动的，按道理在 $Oxyz$ 三轴上的转动惯量也应是以自旋周期循环变动的，因此由式(12.9) 计算出的重力梯度力矩也周期变动。然而，本节中的飞行器是轴对称的，绕对称轴旋转时，任何过质心横轴的转动惯量都是 J_t，而纵轴惯量是 J，这就避免了周期变系数方程式的麻烦。因此，我们直接从式(12.9) 取力矩，带入式(13.38) 后，可以求得

$$J_t\ddot{\varphi} - [4(J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\omega_0\varphi - [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\dot{\psi} = 0 \tag{13.39a}$$

$$J\ddot{\vartheta} = 0 \tag{13.39b}$$

$$J_t\ddot{\psi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\omega_0\psi + [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\dot{\varphi} = 0 \tag{13.39c}$$

可见，俯仰运动是独立的，而滚转和偏航却是相互耦合的。由式(13.39b) 得 $\dot{\vartheta}$ = const，这说明飞行器在原有自旋速率 Ω 之上，增加了常量扰动，不影响自旋轴方向稳定。

为了分析另两通道的运动，将式(13.39a) 和式(13.39c) 改写成

$$\underline{m}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\psi}\end{bmatrix} + \underline{G}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + \underline{K}\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{13.40}$$

其中

$$\underline{m} = \begin{bmatrix}J_t & 0\\ 0 & J_t\end{bmatrix} = \underline{m}^{\mathrm{T}} > 0$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix}0 & -(2J_t - J)\omega_0 - J\Omega\\ (2J_t - J)\omega_0 + J\Omega & 0\end{bmatrix} = -\underline{G}^{\mathrm{T}}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix}-4(J_t - J)\omega_0^2 - J\Omega\omega_0 & 0\\ 0 & -(J_t - J)\omega_0^2 - J\Omega\omega_0\end{bmatrix} = \underline{K}^{\mathrm{T}}$$

显然，式(13.40) 符合附录定理 9.6 的条件，系统稳定的条件是 $\boldsymbol{K} > 0$，或系统是静稳定的。因此，由 $\underline{K}$ 矩阵表达式，可求得俯仰和偏航稳定的条件

$$\begin{aligned}&[4(J_t - J)\omega_0^2 + J\Omega\omega_0][(J_t - J)\omega_0^2 + J\Omega\omega_0]\\ &= 4(J_t - J)^2\omega_0^4 + 5(J_t - J)J\Omega\omega_0^3 + J^2\Omega^2\omega_0^2 > 0\end{aligned} \tag{13.41}$$

引入惯量比参数 k_t 和无因次转速 $\hat{\Omega}$

$$k_t = \frac{J - J_t}{J_t}, \hat{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0} \tag{13.42}$$

稳定条件式(13.41) 成为

$$k_t < \frac{\hat{\Omega}}{4 - \hat{\Omega}}, k_t < \frac{\hat{\Omega}}{1 - \hat{\Omega}} \text{ 与 } k_t > \frac{\hat{\Omega}}{4 - \hat{\Omega}}, k_t > \frac{\hat{\Omega}}{1 - \hat{\Omega}} \tag{13.43}$$

然而定理附 9.6 虽利用起来十分简单，但它只给出系统稳定的充分条件，而为了求得充要的稳定条件，还得先从式(13.40) 求出特征方程式。为此，对式(13.40) 取拉氏变换，用 J_t 遍除各项，再引进式(13.42) 的参数后，得

$$\begin{bmatrix}s^2 + [4k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0^2 & [k_t - 1 - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0 s\\ -[k_t - 1 - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0 s & s^2 + [k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(s)\\ \psi(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

因而求得特征方程式

$$s^4 + \{3k_t + 1 + [k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]^2\}\omega_0^2 s^2 + [4k_t^2 - 5k_t(k_t + 1)\hat{\Omega} + (k_t + 1)^2\hat{\Omega}^2]\omega_0^4 = 0 \tag{13.44}$$

根据附录表 9.1,系统稳定的条件是

$$b_1 = \{3k_t + 1 + [k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]^2\} > 0 \tag{13.45}$$

$$b_0 = 4k_t^2 - 5k_t(k_t + 1)\hat{\Omega} + (k_t + 1)^2\hat{\Omega}^2 > 0 \tag{13.46}$$

$$b_1^2 - 4b_0 > 0 \tag{13.47}$$

事实上,式(13.46) 和式(13.43) 是完全一致的,而式(13.45) 和式(13.47) 是新导出的稳定条件。

利用式(13.45) ~ 式(13.47) 绘得的稳定区域划分图见图 13.17。可见,当 $k_t > 0$(纵轴转动惯量大于横轴的) 时,绕该轴旋转,在大部分 k_t 和 $\hat{\Omega}$ 的区域,特别在 $\hat{\Omega}$ 较大区域,系统是稳定的。而在 $k_t < 0$(绕小转动惯量旋转) 时,系统也能稳定,特别是在 $\hat{\Omega}$ 大的情况。

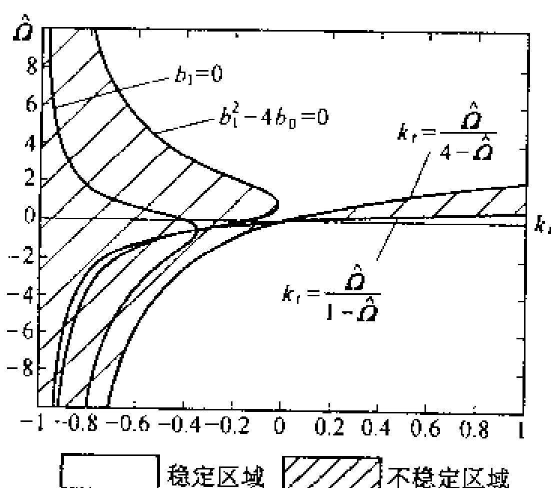


图 13.17　圆轨道自旋稳定飞行器的稳定域

13.6　自旋稳定空间飞行器的章动阻尼

我们已在 13.1 和 13.2 节中说明自旋飞行器的章动运动,它是一不衰减的等幅锥形振动。为了使章动运动逐渐减弱,并最后进入可容许的范围,常在自旋飞行器上安装章动阻尼器,包括被动和主动两种。

本节研究被动章动阻尼器。它是一种不需外界能源的装置,只消耗自旋空间飞行器的能量。假如我们在 13.5 节的飞行器中增设一弹簧活塞式阻尼器,并研究增加阻尼器之后,飞行器的稳定性问题。

图 13.18 是研究对象,在自旋空间飞行器上设置一随同旋转的体固联系 $Ox_by_bz_b$,它与空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 的差别是后者只相对轨道坐标系进行姿态运动(姿态角速度 $\dot{\varphi},\dot{\vartheta},\dot{\psi}$),而不参与自旋(速率为 Ω)。因此,从 $Oxyz$ 到 $Ox_by_bz_b$ 的坐标变换矩阵 $\underline{C}_{bx}$ 是(参考式(10.27))

$$\underline{C}_{bx} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 & -\sin\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Omega t & 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix} \tag{13.48}$$

在 $Ox_by_bz_b$ 的 Ox_b 轴上距 O 点为 l 处安装一阻尼器。阻尼器由弹簧(刚度为 k_d),活塞(质量为 m_d) 和粘性阻尼液(粘度为 C_d) 组成。活塞的平衡点在 Ox_b 轴上,其位移量为沿 Oy_b 的 η。设活塞在 Ox_b 上时($\eta = 0$),飞行器整星的转动惯量矩阵呈对角形,在 $Ox_by_bz_b$ 中的分

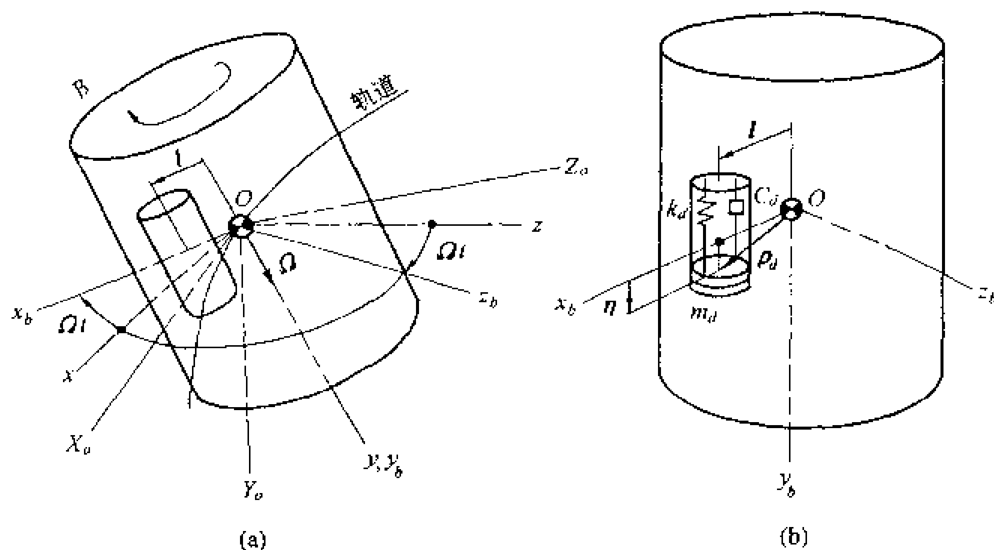


图 13.18　自旋飞行器的章动阻尼

量形式是

$$\underline{J}_0 = \begin{bmatrix} J_t & & 0 \\ & J & \\ 0 & & J_t \end{bmatrix} \tag{13.49}$$

它由两部分组成:阻尼器活塞和除阻尼器活塞外的星体惯量。前者在活塞位于 Ox_b 上时惯量是(参考式(附 3.35))

$$\underline{I}_{d0} = m_d(\underline{l}^{\mathrm{T}}\underline{l}\,\underline{E} - \underline{l}\,\underline{l}^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 \end{bmatrix} m_d \tag{13.50}$$

后者的惯量是 $\underline{I}_b$。由于 $\underline{J}_0 = \underline{I}_b + \underline{I}_{d0}$,因此有

$$\underline{I}_b = \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J - l^2 m_d & 0 \\ 0 & 0 & J_t - l^2 m_d \end{bmatrix} \tag{13.51}$$

当阻尼器活塞运动到距 Ox_b 为 η 位置时,如果设 O 点到活塞中心的矢距是 $\boldsymbol{\rho}_b = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\eta}$,则形成的转动惯量是

$$\underline{I}_d = m_d[\underline{\rho}_d^{\mathrm{T}}\underline{\rho}_d\underline{E} - \underline{\rho}_d\underline{\rho}_d^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} \eta^2 & -l\eta & 0 \\ -l\eta & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 + \eta^2 \end{bmatrix} m_d \tag{13.52}$$

若 η 为小量,略去二阶小的飞行器总惯量是

$$\underline{J} = \underline{I}_b + \underline{I}_d = \begin{bmatrix} J_t + \eta^2 m_d & -l\eta m_d & 0 \\ -l\eta m_d & J & 0 \\ 0 & 0 & J_t + \eta^2 m_d \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} J_t & -l\eta m_d & 0 \\ -l\eta m_d & J & 0 \\ 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}$$

(13.53)

应说明的是：(1) η 随时间变化，因而 J 也是时变的；(2) $\mathbb{J}$ 是在 $Ox_by_bz_b$ 中分解的，而在 $Oxyz$ 中是

$$\underline{J}^* = \underline{C}_{xb}\underline{J}\,\underline{C}_{bx} = \begin{bmatrix} J_t & -l\eta m_d\cos\Omega t & 0 \\ -l\eta m_d\cos\Omega t & J & l\eta m_d\sin\Omega t \\ 0 & l\eta m_d\sin\Omega t & J_t \end{bmatrix} \tag{13.54}$$

为导出姿态动力学方程式，再给出活塞作为质点的速度和加速度。由于 $\boldsymbol{\rho}_d = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\eta}$，故有

$$\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_d = \boldsymbol{v}_0 + \mathring{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \times \boldsymbol{\rho}_d$$

$$\boldsymbol{a}_d = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_d = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}} + 2\boldsymbol{\omega}_\Sigma \times \mathring{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\Sigma \times \boldsymbol{\rho}_d + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \times (\boldsymbol{\omega}_\Sigma \times \boldsymbol{\rho}_d) \tag{13.55}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ 是飞行器相对惯性空间的角速度，其表达式见式(13.36)，对时间的导数见式(13.37)。

姿态运动方程，可通过取相对质心 O 点的力矩平衡条件求得，与式(2.13) 相比，应增加阻尼器的惯性力矩，成为

$$\int_B \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}\mathrm{d}m + \boldsymbol{\rho}_d \times \boldsymbol{a}_d m_d = \boldsymbol{M}$$

把式(11.14) 和式(13.55) 代入，考虑到 O 为质心，因而有

$$\int_B \boldsymbol{r}\mathrm{d}m + \boldsymbol{\rho}_d m_d = 0 \tag{13.56}$$

式(11.14) 中的 $\boldsymbol{a}_p$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别用 $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ 代替，姿态方程成为

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_\Sigma + \boldsymbol{\rho}_d \times (\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}} + 2\boldsymbol{\omega}_\Sigma \times \mathring{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{M} \tag{13.57}$$

考虑到 $\mathbb{J}$ 在 $Oxyz$ 中的分量形式是 $\underline{J}^*$，$\boldsymbol{\rho}_d$ 在 Ox_b 和 Oy_b 方向的投影是 l 和 η，它们被变换到 $Oxyz$ 中是

$$\underline{\rho}_d = \underline{C}_{xb}\begin{bmatrix} l \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\cos\Omega t \\ \eta \\ -l\sin\Omega t \end{bmatrix} \tag{13.58}$$

式(13.57) 中其他矢量的分量可由式(13.36)、式(13.37) 和式(13.54) 给出，代入式(13.57)，可以求得在 $Oxyz$ 中分解的姿态运动方程式。略去二阶以上小量后，有

$$J_t\ddot{\varphi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\omega_0\varphi - [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\dot{\psi} + m_d l[\ddot{\eta} + (\omega_0 - \Omega)^2\eta]\sin\Omega t = M_x \tag{13.59a}$$

$$J_t\ddot{\vartheta} = M_y \tag{13.59b}$$

$$J_t\ddot{\psi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\omega_0\psi + [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\dot{\varphi} + m_d l[\ddot{\eta} + (\omega_0 - \Omega)^2\eta]\cos\Omega t = M_z \tag{13.59c}$$

和式(13.39) 相比，此处滚转和偏航方程的左侧多了包含活塞运动和自旋角 Ωt 的正余弦项。上述方程式中，自变量是 φ，ϑ，ψ 和 η，共四个，比方程式数目多一，而且对于 η 变量其系数是周期函数，方程式成为 Floquet 型。因此，我们下面要做的，首先是再求出一个独立方程以使方程封闭有解；其次是寻找一个解 Floquet 方程的方法。

所要寻找的另一方程式，应是阻尼器活塞的运动方程式。假如把活塞从飞行器中分离出来，其上作用力应如图 13.19 所示。除了弹簧弹力和粘性阻力 $-k_d\boldsymbol{\eta}$ 和 $-C\dot{\boldsymbol{\eta}}$ 之外，就是通过油缸壁作用在与运动方向垂直的力 $\boldsymbol{F}$。活塞 m_d 在参考系中的加速度是 $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_d$，因此运动方程为

$$m_d\ddot{\boldsymbol{\rho}}_d = -C_d\dot{\boldsymbol{\eta}} - k_d\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{F} \tag{13.60}$$

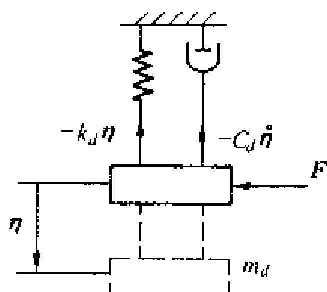


图 13.19 阻尼器活塞上的作用力

由式(13.55)求得 $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_d$，代入式(13.60)，再写成在 $Oxyz$ 中的分量后，取它在 Oy 方向的分量(略去二阶小量)

$$\begin{aligned} &m_d\ddot{\eta} + C_d\dot{\eta} + k_d\eta + m_dl(\ddot{\varphi}\sin\Omega t + \ddot{\psi}\cos\Omega t) + 2m_dl\Omega(\dot{\varphi}\cos\Omega t - \dot{\psi}\sin\Omega t) + \\ &m_dl(\omega_0^2 - 2\omega_0\Omega)(\varphi\sin\Omega t + \psi\cos\Omega t) = 0 \end{aligned} \tag{13.61}$$

显见，它也是周期变系数的方程式。

为消除周期变系数，可用下述变换关系

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \varphi\cos\Omega t - \psi\sin\Omega t \\ \sigma_2 &= \vartheta \\ \sigma_3 &= \varphi\sin\Omega t + \psi\cos\Omega t \end{aligned} \tag{13.62}$$

利用这些关系式，经过推导，在无外力矩作用的情况下，Floquet 方程式变成常系数微分方程

$$J_t\ddot{\delta}_1 - (2J_t - J)(\omega_0 - \Omega)\dot{\delta}_3 + (J - J_t)(\omega_0 - \Omega)^2\delta_1 = 0 \tag{13.63a}$$

$$J\ddot{\delta}_2 = 0 \tag{13.63b}$$

$$J_t\ddot{\delta}_3 + (2J_t - J)(\omega_0 - \Omega)\dot{\delta}_1 + (J - J_t)(\omega_0 - \Omega)^2\delta_3 + m_dl[\ddot{\eta} + (\omega_0 - \Omega)^2\eta] = 0 \tag{13.63c}$$

$$m_d\ddot{\eta} + C_d\dot{\eta} + k_d\eta + m_dl\ddot{\delta}_3 + m_dl(\omega_0 - \Omega)^2\delta_3 = 0 \tag{13.63d}$$

上述四方程中，第二式仍独立于其他三式，有 $\dot{\sigma}_2 = \text{const}$。事实上，这仍然是自旋运动的常值干扰，并不影响自旋轴的方向稳定性。为分析另外三个通道的稳定性，可用 J_t 除式(13.63a) 和式(13.63c)，用 m_d 除式(13.63d)，再进行拉氏变换，得

$$\begin{bmatrix} s^2 + k_t(\omega_0 - \Omega)^2 & -(1 - k_t)(\omega_0 - \Omega)s & 0 \\ (1 - k_t)(\omega_0 - \Omega)s & s^2 + k_t(\omega_0 - \Omega)^2 & \dfrac{m_dl}{J_t}[s^2 + (\omega_0 - \Omega)^2] \\ 0 & l[s^2 + (\omega_0 - \Omega)^2] & s^2 + 2\omega_d\zeta s + \omega_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(s) \\ \sigma_3(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} = \underline{0}$$

其中

$$\omega_d = \left(\frac{k_d}{m_d}\right)^{1/2}, \zeta = \frac{C_d}{2\omega_d m_d}, k_t = \frac{J - J_t}{J_t} \tag{13.64}$$

令左侧方阵的行列式为零，可得系统特征方程式

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{13.65}$$

其中

$$\begin{aligned} a_6 &= 1 - \hat{I}_d \\ a_5 &= 2(\omega_0 - \Omega)\hat{\omega}_d \zeta \\ a_4 &= (\omega_0 - \Omega)^2[\hat{\omega}_d^2 + 1 + k_t^2 - \hat{I}_d(k_t + 2)] \\ a_3 &= 2(\omega_0 - \Omega)^3 \hat{\omega}_d \zeta (1 + k_t^2) \\ a_2 &= (\omega_0 - \Omega)^4[\hat{\omega}_d^2(1 + k_t^2) + k_t^2 - \hat{I}_d(k_t + 2)] \\ a_1 &= 2(\omega_0 - \Omega)^5 \hat{\omega}_d k_t \zeta \\ a_0 &= (\omega_0 - \Omega)^6(\hat{\omega}_d^2 k_t^2 - \hat{I}_d k_t) \end{aligned} \tag{13.66}$$

其中

$$\hat{\omega}_d = \frac{\omega_d}{|\omega_0 - \Omega|}, \hat{I}_d = \frac{m_d l^2}{J_t} \tag{13.67}$$

根据附录 7，六阶特征方程式的稳定条件是 $a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$。其中，$a_5, a_3, a_1$ 大于零是必然的（假如 $\omega_0 - \Omega$ 为负，可以 -1 遍乘式(13.65)各项）；由 $a_0 > 0$，得

$$k_t \hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_d > 0 \tag{13.68}$$

它与重力梯度稳定飞行器的式(12.62)类似；而最后两不等式是

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ a_6 & a_4 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0 \tag{13.69}$$

把有关系数代入后，得

$$\Delta_3 = k_t(1 - k_t)(1 + k_t) > 0 \tag{13.70}$$

$$\Delta_5 = 0 \tag{13.71}$$

式(13.70)表明只当 k_t 在(0,1)的范围 $\Delta_3 > 0$，系统才渐近稳定，而当 $k_t \leqslant 0$ 系统不稳。但式(13.71)为零无法判断系统的稳定性。

上面六个稳定判据中，第六个式(13.71)无法证实系统稳定否，应该再找其他方法核验。下面改用附录 9 中的定理，为此用 J_t 遍除式(13.63)各项，取俯仰通道之外各式，写成

$$\underline{m}\begin{bmatrix} \ddot{\sigma}_1 \\ \ddot{\sigma}_3 \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + (\underline{G} + \underline{D})\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_3 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \underline{K}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \eta \end{bmatrix} = \underline{0} \tag{13.72}$$

其中

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m_t \\ 0 & m_t & a_t \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-k_t) & 0 \\ 1-k_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \underline{K} = \begin{bmatrix} k_t\omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_t\omega_s^2 & m_t\omega_s^2 \\ 0 & m_t\omega_s^2 & k \end{bmatrix} \tag{13.73}$$

式中

$$m_t = \frac{m_d l}{J_t}, a_t = \frac{m_d}{J_t}, C = \frac{C_d}{J_t}$$
$$k = \frac{k_d}{J_t}, \omega_s = \omega_0 - \Omega \tag{13.74}$$

式(13.72)类型的系统，可以用熟知的凯尔文-台特-契达耶夫定理(又称 KTC 定理)[35]判断稳定性。按照这个定理，式(13.72)描述的系统，如若渐近稳定，应是完全阻尼(即 $\boldsymbol{D} > 0$)和静稳定(即 $\boldsymbol{K} > 0$)的。这个要求对于空间飞行器而言，往往不能满足，如本例，$\boldsymbol{D}$ 就不符合这个条件。这时可以利用附录 9 的定理 9.8 或 9.9。

定理 9.8 给出式(13.72)类型系统稳定的充分条件，它叙述如下：若 $\underline{m}^{\mathrm{T}} = \underline{m} > 0, \underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}$，且有 $\underline{m}, \underline{G}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n\times n}$，则当 $\underline{D} > 0, \underline{K} > 0$ 时，系统渐近稳定。定理对系数阵的各项要求除

$$\underline{D} > 0, \underline{m} > 0 \quad 和 \quad \underline{K} > 0 \tag{13.75}$$

外均能满足。而由式(13.75)后两式，可求得

$$1 - \hat{I}_d > 0, \hat{\omega}_d^2 > \frac{\hat{I}_d}{k_t} \tag{13.76}$$

这两式分别相当 $a_6 > 0$ 和 $a_0 > 0$ 的条件，前者一般可自动满足；而后者可作为选择阻尼器自振频率(或 k_d 和 m_d)的依据。此外，式(13.76)还要求 $k_t > 0$，这和式(13.70)也是一致的。至此，我们获得的系统渐近稳定的充分条件与用附录 7 中的方法相比较，并无新的判据，然而 $\underline{D} > 0$ 仍未被满足。

为了进一步阐明 $\Delta_5 = 0$ 带来的不确定因素和式(13.76)第一式 $\underline{D} > 0$ 不被满足的影响，下面再利用给出充分和必要条件的定理 9.9。它被叙述为，系统式(13.72)渐近稳定的充要条件是：$\underline{m}^{\mathrm{T}} = \underline{m} > 0, \underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K} > 0$，和

$$\underline{D} \not< 0 \tag{13.77}$$

及

$$\mathrm{rank}[\underline{C}^{\mathrm{T}} \mid \underline{A}^{\mathrm{T}}\underline{C}^{\mathrm{T}} \mid (\underline{A}^{\mathrm{T}})^2\underline{C}^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid (\underline{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\underline{C}^{\mathrm{T}}] = n \tag{13.78}$$

其中，n 是式(13.72)的维数(本例中 $n = 3$)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{O} & \\ -\underline{m}^{-1}\underline{K} & -\underline{m}^{-1}(\underline{G} + \underline{D}) \end{bmatrix} \tag{13.79}$$
$$\underline{C} = [0 \mid \underline{D}]$$

$\underline{A}$ 中的 $\underline{E}$ 是 $n \times n$ 维单位阵，$\underline{m}$ 阵的逆是

$$\underline{m}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & a_t & -m_t \\ 0 & -m_t & 1 \end{bmatrix} \tag{13.80}$$

$$\Delta = a_t - m_t^2$$

把$\underline{m}^{-1}$代入式(13.79)得

$$\underline{A} = \frac{1}{\Delta}\left[\begin{array}{ccc:ccc} & & & \Delta & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & \Delta & 0 \\ & & & 0 & 0 & \Delta \\ \hdashline -\Delta k_t\omega_s^2 & 0 & 0 & 0 & \Delta(1-k_t) & 0 \\ 0 & (m_t^2 - a_t k_t)\omega_s^2 & (k - a_t\omega_s^2)m_t & -(1-k_t)a_t & 0 & a_m C \\ 0 & -(1-k_t)m_t\omega_s^2 & m_t^2\omega_s^2 - k & (1-k_t)m_t & 0 & -C \end{array}\right]$$

$$\underline{C} = \left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{0}_{3\times3} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & C \end{array}\right] \tag{13.81}$$

利用$\underline{A}$和$\underline{C}$,代入式(13.78)后,其中的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-k_t)k_t\omega_s^2 m_t C/\Delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -(1-k_t)m_t\omega_s^2 C/\Delta & \vdots & \vdots & (1-k_t)\omega_s^2 m_t C^2/\Delta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (m_t^2\omega_s^2 - k)C/\Delta & \vdots & \vdots & -(m_t^2\omega_s^2 - k)C^2/\Delta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (1-k_t)m_t C/\Delta & \vdots & \vdots & -(1-k_t)m_t C^2/\Delta^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & (1-k_t)m_t(1-k_t-\omega_s^2)C/\Delta \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & -C^2/\Delta & \vdots & \vdots & [(m_t^2\omega_s^2 - k)C/\Delta] - C^3/\Delta^2 \end{bmatrix}$$

如果取第1,2,6行和第3,6,9列的元素构成

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1-k_t)k_t\omega_s^2 m_t C/\Delta \\ 0 & -(1-k_t)m_t\omega_s^2 C/\Delta & (1-k_t)\omega_s^2 m_t C^2/\Delta^2 \\ C & -C^2/\Delta & [(m_t^2\omega_s^2 - k)C/\Delta] - C^3/\Delta^2 \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det\underline{B} = -(1-k_t)^2 k_t m_t^2\omega_s^4 C^3/\Delta^2$$

显见,除了$k_t = 0$和$k_t = 1$的情况,上式将不为零,说明$k_t \neq 0$和$k_t \neq 1$时,式(13.78)的秩等于3,因此系统将是渐近稳定的。若结合$\underline{K} > 0$所得的式(13.76)第二式,还应增加$k_t > 0$的条件。这样,式(13.72)系统渐近稳定的条件被综合为式(13.76)后两式,和$k_t > 0$,与式(13.68)及式(13.70)两式的要求最完全一致。$k_t > 0$的条件即$J > J_t$,仍然是前面得到的绕最大转动惯量轴旋转系统才稳定的结论,只是这里的稳定是渐近的。

对比式(13.48)和式(13.62),显见式(13.62)乃是把欧拉角转到$Ox_by_bz_b$系中的变换式,因此变换后的σ_1,σ_2和σ_3是$Ox_by_bz_b$中的姿态角,式(13.63)是在$Ox_by_bz_b$中分解的姿态运动方程式。

13.7　自旋空间飞行器的两种强迫运动

首先分析推力倾斜的旋转飞行器。为了简单，设飞行器为轴对称体，绕对称轴以 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转(图 13.20)。假如飞行器的推力 $\boldsymbol{F}$ 偏离纵轴，在 Ox_by_b 平面中与 y_b 轴构成一小角度 δ，着力点与 O 距离为 l。推力 $\boldsymbol{F}$ 除推动飞行器做轨道运动外，还产生力矩使飞行的姿态改变。当 O 点为质心时，轨道和姿态运动是互相解耦的，如果设 $J_{bx}=J_{bz}=J_t, J_{by}=J$，则姿态运动方程式(在 $Ox_by_bz_b$ 中的分量形式)是

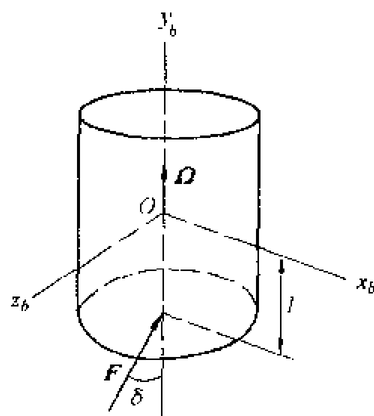


图 13.20　推力倾斜的自旋空间飞行器

$$J_t\dot{\omega}_{bx}-(J-J_t)\omega_{by}\omega_{bz}=0 \tag{13.82a}$$

$$J\dot{\omega}_{by}=0 \tag{13.82b}$$

$$J_t\dot{\omega}_{bz}+(J-J_t)\omega_{bx}\omega_{by}=Fl\sin\delta \tag{13.82c}$$

由第二式得 $\omega_{by}=\Omega=\text{const}$，把它代入另外两式，得

$$\dot{\omega}_{bx}-\omega_p\omega_{bz}=0 \tag{13.83a}$$

$$\dot{\omega}_{bz}+\omega_p\omega_{bx}=Fl\sin\delta/J_t \tag{13.83b}$$

其中

$$\omega_p=\frac{J-J_t}{J_t}\Omega \tag{13.84}$$

从式(13.83a)求出 ω_{bz} 代入式(13.83b)，再从式(13.83b)求出 ω_{bx} 代入式(13.83a)，求得

$$\ddot{\omega}_{bx}+\omega_p^2\omega_{bx}=\omega_pFl\sin\delta/J_t$$

$$\ddot{\omega}_{bz}+\omega_p^2\omega_{bz}=0$$

从上两式，可以解得

$$\omega_{bx}=A\cos\omega_pt+B\sin\omega_pt+FL\sin\delta/(J_t\omega_p)$$

$$\omega_{bz}=C\cos\omega_pt+D\sin\omega_pt$$

应用 $t=0$ 时 $\omega_{bx}=\omega_{bx}(0)$ 和 $\omega_{bz}=\omega_{bz}(0)$ 的初始条件和式(13.83)关系式，求得积分常数 A,B,C 和 D 后，有

$$\omega_{bx}=\left[\omega_{bx}(0)-\frac{Fl\sin\delta}{J_t\omega_p}\right]\cos\omega_pt+\omega_{bz}(0)\sin\omega_pt+\frac{Fl\sin\delta}{J_t\omega_p} \tag{13.85}$$

$$\omega_{bz}=\omega_{bz}(0)\cos\omega_pt-\left[\omega_{bx}(0)-\frac{Fl\sin\delta}{J_t\omega_p}\right]\sin\omega_pt \tag{13.86}$$

它们表示 x_b 和 y_b 轴除了有 ω_p 为频率的章动运动外，x_b 轴还有等速旋转，它与绕 z_b 轴的力矩 $Fl\sin\delta$ 成正比，而与 J_t 成反比。对于真实的飞行器总存在着这种或那种能量损耗，其结果是使章动运动逐渐衰减，并最终消失。而绕 x_b 轴的等速转动 $\omega_{bx}=\dfrac{Fl\sin\delta}{J_t\omega_p}$ 却并不衰减，它使 $Ox_by_bz_b$ 绕 Ox_b 轴不停转动，ω_{bx} 被称为进动角速度。而这种在 z_b 方向的力矩，引起的绕

x_b 轴的转动，被称为旋转体的进动。根据自旋角速度、作用力矩和进动角速度三者的矢量方向，可以归纳为：**进动是由与自旋角速度垂直方向的力矩动造成的，使自旋角速度以最近角距离倒向作用力矩的等速转动。**

进一步分析自旋轴 Oy_b 绕 Ox_b 的转动，在 T 时间内的转角是 $\varphi = \int_0^T \omega_{bx} \mathrm{d}t$，如果只计外力矩引起的转角，并令 $Fl\sin\delta = M_z$，则将式(13.85) 代入后有

$$\varphi = \frac{M_z T}{J_t \omega_p}$$

其中，M_zT 是力矩冲量，如以 I 表示，再将式(13.84) 代入，上式成为

$$\varphi = \frac{I}{(J - J_t)\Omega} \tag{13.87}$$

可见，Oy_b 绕 x_b 转过的角度与力矩冲量 I 成正比，而与 $(J - J_t)\Omega$ 成反比。

上面研究的情况是发动机安装有偏差时引起的进动现象，特点是扰动力矩随着飞行器一同旋转，绕之进动的 x_b 轴也是转动着的，因此空间飞行器在空间做着十分复杂的运动。下面所要分析的也是一种进动，它不是有害的扰动而是控制自旋飞行器转动轴指向的进动运动。如果希望自旋飞行器的转动轴在 $Oxyz$ 坐标系中绕 x 轴转动某一角度，按照进动原理应该在 z 轴方向施加一力矩，力矩与 z 轴同向还是逆向，则取决于上述力矩、进动角速度和自旋轴的最近角距离向力矩矢量逼近的进动法则。

若空间飞行器未旋转时，$Oxyz$ 和 $Ox_by_bz_b$ 两坐标系重合，如果 $Ox_by_bz_b$ 与三惯性主轴重合，而主转动惯量互不相同，则当空间飞行器绕某主轴旋转时，$Oxyz$ 系中的转动惯量是周期变化的。然而，对于轴对称体绕对称轴旋转的飞行器，则 $Oxyz$ 中的转动惯量阵却是常量。为了方便，我们只研究轴对称体飞行器的自旋轴指向的控制问题。对于这种飞行器在 $Oxyz$ 中绕 Oy 轴旋转的欧拉方程是

$$J_t \dot{\omega}_x - (J - J_t)\omega_y\omega_z = 0 \tag{13.88a}$$

$$J\dot{\omega}_y = 0 \tag{13.88b}$$

$$J_t \dot{\omega}_z + (J - J_t)\omega_x\omega_y = M_z \tag{13.88c}$$

它和式(13.82) 相同，其中的参数含义也一样，两者的差别是分别在 $Ox_by_bz_b$ 和 $Oxyz$ 中取分量的结果。然而让飞行器自旋轴 Oy 绕 Ox 轴变化方向的力矩 M_z 如何获得呢？它只能由飞行器上的控制器（如推力器等）产生，而后者随飞行器旋转，应该怎样形成沿 Oz 轴（不转动）的力矩 M_z 就是问题的所在。方法是让推力器的力 $\boldsymbol{F}$ 平行 Oy，距离为 R，只在推力器越过 Ox 轴的前后各为 $\Delta\mu/2$ 角时产生推力，因此相对 Oz 的瞬时力矩（图 13.21）是 $M_z = FR\cos\theta$，其中 θ 是自 Ox 轴计算的飞行器自旋角，且有 $\Omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$。因此力矩冲量是 $\mathrm{d}I_m = FR\cos\theta\mathrm{d}t = FR\cos\theta\mathrm{d}\theta/\Omega$，总冲便是

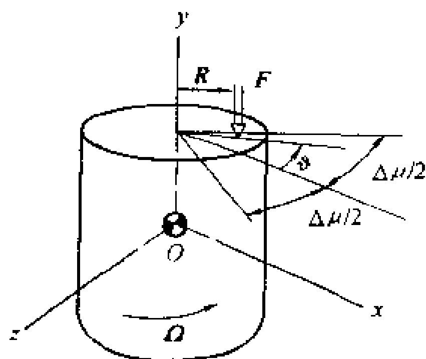


图 13.21　M_z 力矩的产生

$$I_m = 2\int_0^{\Delta\mu/2} FR\cos\theta \mathrm{d}\theta/\Omega = \frac{2FR}{\Omega}\sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) \tag{13.89}$$

如果希望 Oy 轴绕 Ox 转过 φ 角，那么力矩冲量 I_m 便可由式(13.87)算出，而由上式获得推力器应工作的 $\Delta\mu$ 范围。

不过我们还得分析一下，推力器的工作效率。设推力器自身的推力冲量为 I_f，即

$$I_f = 2\int_0^{\Delta\mu/2} F\mathrm{d}\mu/\Omega = \frac{F\Delta\mu}{\Omega} \tag{13.90}$$

I_m 和 I_f 之比表示单位推力冲量产生的控制力矩冲量，也就是控制自旋轴方向的效率，所以

$$A = \frac{I_m}{I_f} = \frac{R\sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right)}{\frac{\Delta\mu}{2}} \tag{13.91}$$

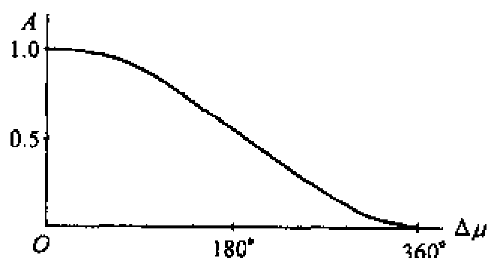


图 13.22　推力器的工作效率

其变化规律如图 13.22 所示。它表明，随着推力器工作角度 $\Delta\mu$ 的增大，工作效率却不断下降，在 $\Delta\mu$ 达到 360° 时降为零。其实这也是很明显的，当推力器整周工作时，所产生的平均力矩将变为零。

第十四章　双自旋空间飞行器

单自旋空间飞行器的优点是旋转轴的方向在惯性空间中保持不变,但缺点是飞行器上找不到相对地球稳定不动的部分,然而后者有时是必要的,如对地观测的装置和定向天线等。双自旋空间飞行器,不但保持了单自旋的优点,还可以克服它的缺点。所谓双自旋空间飞行器,是在同一旋转轴上安装两个以不同转速转动的部分,其中一个部分主要起保持转轴稳定的作用,常被称为**转子**,另一部分又被称为**消旋平台**,其作用是创造一稳定地指向要求方向的条件,以便安装有效载荷。

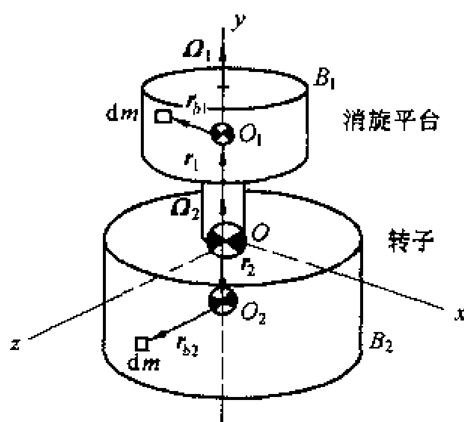


图 14.1　双自旋空间飞行器

图 14.1 是一种双自旋空间飞行器的例子,它的自旋轴与轨道平面垂直,B_1 是消旋平台,B_2 为转子。假如 B_1 的自旋角速度与其绕地球公转的角速度相等,它将以固定不变的一面对正地球,这个特性正好被用来安装对地通信和观察的装置。

14.1　双自旋空间飞行器的姿态动力学方程式

图 14.1 中 O_1 和 O_2 分别是 B_1 和 B_2 体质心,总质心为 O。通常双自旋飞行器总有一部分作为安装有效载荷的地方,即前文提到的消旋平台,这里取为 B_1。它相对轨道坐标系的姿态运动是我们最关心的,通常它相对空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 的转速为零,以保证给有效载荷以固定的指向,但为了通用性,本节设 B_1 对 $Oxyz$ 的角速度是 $\boldsymbol{\Omega}_1$,旋转轴与 Oy 重合。另一部分 B_2 的作用是提供足够角动量,以保持空间飞行器的定轴性,即前文的转子。设转子的旋转轴和消旋平台一样,也与 Oy 重合,角速度为 $\boldsymbol{\Omega}_2$。O_1 和 O_2 至 O 的矢距分别是 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$。在 B_1 和 B_2 上各取一微元质量 $\mathrm{d}m$,它们分别至 O_1 和 O_2 的矢径是 $\boldsymbol{r}_{b1}$ 和 $\boldsymbol{r}_{b2}$。设

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_{b1}, \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_{b2}。\tag{14.1}$$

令空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 的绝对角速度为 $\boldsymbol{\omega}^*$,显然

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0 \tag{14.2}$$

这里,$\boldsymbol{\omega}$ 是 $Oxyz$ 相对轨道坐标系的角速度,即姿态角速度,$\boldsymbol{\omega}_0$ 是轨道系对惯性空间的角速度。

B_1 体上 $\mathrm{d}m$ 质量微元参加姿态运动的同时,还要自旋,其速度是

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}$$

式中,$\boldsymbol{v}_0$ 是 O 点的(轨道)速度。对上式求绝对导数是 $\mathrm{d}m$ 的加速度

$$\boldsymbol{a}_1 = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1} + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{r}_{b1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times [(\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{r}_{b1}] = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_1) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}) + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{r}_{b1} + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}) + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b1}) \tag{14.3}$$

同理,求得 B_2 上微元质量 $\mathrm{d}m$ 的加速度

$$\boldsymbol{a}_2 = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_2) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2} + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2}) + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_2) \times \boldsymbol{r}_{b2} + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2}) + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b2}) \tag{14.4}$$

空间飞行器的姿态运动方程式是

$$\int_{B_1} (\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{a}_1)\mathrm{d}m + \int_{B_2} (\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{a}_2)\mathrm{d}m = \boldsymbol{M}$$

左侧是 B_1 体和 B_2 体相对 O 点的惯性力矩,右侧是对于 O 点的外力矩之和。把式(14.3)和式(14.4)代入上式,考虑到 O_1、O_2 和 O 是质心,因而有

$$\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1}\mathrm{d}m = 0, \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2}\mathrm{d}m = 0, \qquad \int_{B_1} \boldsymbol{\rho}_1\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{\rho}_2\mathrm{d}m = 0, \tag{14.5}$$

姿态方程式可以写成

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} \boldsymbol{\rho}_1 \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_1)\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{\rho}_2 \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_2)\mathrm{d}m + \\
&\int_{B_1} \boldsymbol{\rho}_1 \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_1)]\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{\rho}_2 \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_2)]\mathrm{d}m + \\
&\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})\mathrm{d}m + \int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m + \int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{r}_{b1}]\mathrm{d}m + \\
&\int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2})\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [\boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_2) \times \boldsymbol{r}_{b2}]\mathrm{d}m + \\
&\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m + \int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m + \\
&\int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [\boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m = \boldsymbol{M}
\end{aligned}$$

利用式(附 3.33)和式(附 3.41),上式还可改造为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \mathbb{J}_1 \cdot \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbb{J}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbb{J}_2 \cdot \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbb{J}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2 + \\
&\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m + \int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m + \int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m + \\
&\int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [\boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_2) \times \boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m = \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{14.6}$$

其中

$$\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^*=\int_{B_1}\boldsymbol{\rho}_1\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}^*\times\boldsymbol{\rho}_1)\mathrm{d}m+\int_{B_2}\boldsymbol{\rho}_2\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}^*\times\boldsymbol{\rho}_2)\mathrm{d}m$$

$$\boldsymbol{\omega}^*\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^*=\int_{B_1}\boldsymbol{\rho}_1\times[\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\rho}_1)]\mathrm{d}m+\int_{B_2}\boldsymbol{\rho}_2\times[\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\rho}_2)]\mathrm{d}m \tag{14.7}$$

$$\mathbb{J}_i\cdot\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i=\int_{B_i}\boldsymbol{r}_{bi}\times(\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i\times\boldsymbol{r}_{bi})\mathrm{d}m,\ i=1,2$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbb{J}_i\cdot\boldsymbol{\Omega}_i=\int_{B_i}\boldsymbol{r}_{bi}\times[(\boldsymbol{\Omega}_i\times(\boldsymbol{\Omega}_i\times\boldsymbol{r}_{bi})]\mathrm{d}m,\ i=1,2$$

其中$\mathbb{J}$是整个飞行器相对质心O、$\mathbb{J}_1$和$\mathbb{J}_2$分别是B_1和B_2相对质心O_1和O_2的转动惯量并矢，利用式(附3.34)和式(附3.35)，它们分别可表述为

$$\mathbb{J}=\int_{B_1}(\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1\mathbb{E}-\boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{\rho}_1)\mathrm{d}m+\int_{B_2}(\boldsymbol{\rho}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2\mathbb{E}-\boldsymbol{\rho}_2\boldsymbol{\rho}_2)\mathrm{d}m=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{J}}\underline{\boldsymbol{e}}$$

$$\mathbb{J}_i=\int_{B_i}(\boldsymbol{r}_{bi}\cdot\boldsymbol{r}_{bi}\mathbb{E}-\boldsymbol{r}_{bi}\boldsymbol{r}_{bi})\mathrm{d}m=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{J}}_i\underline{\boldsymbol{e}},\ i=1,2 \tag{14.8}$$

其中$\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k}]$是$Oxyz$的基矢。如果把式(14.1)代入式(14.8)第一式，注意到式(14.5)，还可求得

$$\mathbb{J}=\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_2+\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}r_1^2m_1+r_2^2m_2 & & \underline{0}\\ & 0 & \\ \underline{0} & & r_1^2m_1+r_2^2m_2\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{e}} \tag{14.9}$$

m_1和m_2分别是B_1和B_2的质量。把$\boldsymbol{r}_{bi}$分解为

$$\boldsymbol{r}_{bi}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix},\ i=1,2 \tag{14.10}$$

式(14.8)第二式还可被改造成为

$$\underline{J}_i=\int_{B_i}\begin{bmatrix}y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i\\ -x_iy_i & z_i^2+x_i^2 & -y_iz_i\\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2\end{bmatrix}\mathrm{d}m,\quad i=1,2$$

这是B_1体和B_2体转动惯量在$Oxyz$中分量形式，由于B_1、B_2在$Oxyz$中旋转，一般说转动惯量的分量应是变化的，然而B_1和B_2是绕Oy轴的旋转体，转动惯量分量才保持为常值，而惯量积为零，于是有

$$\underline{J}_i=\begin{bmatrix}J_{it} & & \\ & J_i & \\ & & J_{it}\end{bmatrix},\ i=1,2 \tag{14.11}$$

$$J_{it}=\int_{B_i}(y_i^2+z_i^2)\mathrm{d}m=\int_{B_i}(y_i^2+x_i^2)\mathrm{d}m$$

$$J_i=\int_{B_i}(x_i^3+z_i^2)\mathrm{d}m$$

因此,式(14.9)变成

$$\mathbb{J} = \underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{J}\,\underline{e} = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} J_t & & \\ & J & \\ & & J_t \end{bmatrix}\underline{e} \tag{14.12}$$

$$J_t = J_{1t} + J_{2t} + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2$$

$$J = J_1 + J_2$$

式(14.6)中的角速度 $\boldsymbol{\omega}^*$ 在 $Oxyz$ 中的分量见式(10.18),小角度情况参考式(10.21),是

$$\boldsymbol{\omega}^* = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} \cong \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \omega_0\psi \\ \dot{\vartheta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \omega_0\varphi \end{bmatrix} \tag{14.13}$$

而角加速度是

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x^* \\ \dot{\omega}_y^* \\ \dot{\omega}_z^* \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 \cong \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} - \omega_0\dot{\psi} \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\psi} + \omega_0\dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{14.14}$$

B_1 体和 B_2 体的自旋角速度和它的加速度分量形式是

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_i \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1,2,$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_i = \underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Omega}_i \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1,2 \tag{14.15}$$

利用上面的矢量和分量关系式和附录 3 关于矢量乘积的分解法,可把式(14.6)中的积分项改造为,例如

$$\int_{B_1}(\boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m = -\int_{B_1}(\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})(\boldsymbol{r}_{b1} \cdot \boldsymbol{\omega}^*)\mathrm{d}m =$$

$$\underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{\Omega}_1^{\mathrm{T}}\int_{B_1}\underline{r}_{b1}\underline{r}_{b1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\underline{\omega}^* = \underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{\Omega}_1^{\mathrm{T}}\int_{B_1}\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_1y_1 & y_1^2 & y_1z_1 \\ x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2 \end{bmatrix}\mathrm{d}m\underline{\omega}^*$$

上式的积分,非对角线元素为零(旋转体为对称的),对角线的元素可以从式(14.11)的 J_t 和 J_{it} 表达式求得

$$\int_{B_1} x_1^2\mathrm{d}m = \int_{B_1} z_1^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}J_1$$

$$\int_{B_1} y_1^2\mathrm{d}m = J_{1t} - \frac{1}{2}J_1 \tag{14.16}$$

所以上述积分成为

$$\underline{e}^{\mathrm{T}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-J_1\Omega_1\omega_z^*\\0\\J_1\Omega_1\omega_x^*\end{bmatrix}$$

式(14.6)中另外两项积分是

$$\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[\boldsymbol{\Omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m=-\int_{B_1}(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_{b1})(\boldsymbol{r}_{b1}\cdot\boldsymbol{\Omega}_1)\mathrm{d}m=$$

$$\underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{\omega}^{*\times\mathrm{T}}\int_{B_1}\underline{r}_{b1}\underline{r}_{b1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\underline{\Omega}_1=\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}(J_{1t}-\frac{1}{2}J_1)\Omega_1\omega_z^*\\0\\-(J_{1t}-\frac{1}{2}J_1)\Omega_1\omega_x^*)\end{bmatrix}$$

$$\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\Omega}_1)\times\boldsymbol{r}_{b1}]\mathrm{d}m=\mathbb{J}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\Omega}_1)=\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-J_{1t}\Omega_1\omega_z^*\\0\\J_{1t}\Omega_1\omega_x^*\end{bmatrix}$$

于是

$$\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m+\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[\boldsymbol{\Omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m+\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\Omega}_1)\times\boldsymbol{r}_{b1}]\mathrm{d}m=$$

$$\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-J_1\Omega_1\omega_z^*\\0\\J_1\Omega_1\omega_x^*\end{bmatrix}=\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{H}_{s1}\tag{14.17}$$

$$\boldsymbol{H}_{s1}=\underline{e}^{T}\begin{bmatrix}0\\J_1\Omega_1\\0\end{bmatrix}$$

同理,还有

$$\int_{B_2}\boldsymbol{r}_{b2}\times[\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\Omega}_2\times\boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m+\int_{B_2}\boldsymbol{r}_{b2}\times[\boldsymbol{\Omega}_2\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m+\int_{B_2}\boldsymbol{r}_{b2}\times[(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\Omega}_2)\times\boldsymbol{r}_{b2}]\mathrm{d}m=$$

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-J_2\Omega_2\omega_z^*\\0\\J_2\Omega_2\omega_x^*\end{bmatrix}=\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{H}_{s2}\tag{14.18}$$

$$\boldsymbol{H}_{s2}=\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\J_2\Omega_2\\0\end{bmatrix}$$

考虑到式(14.17)和式(14.18),式(14.6)可改造成为

$$\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^*+\boldsymbol{\omega}^*\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^*+\sum_{i=1}^{2}(\mathbb{J}_i\cdot\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i+\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbb{J}_i\cdot\boldsymbol{\Omega}_i+\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{H}_{si})=\boldsymbol{M}$$

由于 $\boldsymbol{\Omega}_i(i=1,2)$ 是不变量,以及 $\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbb{J}_i\cdot\boldsymbol{\Omega}_i=0$(请读者自行推导),上式还可简化为

$$\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^*+\boldsymbol{\omega}^*\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^*+\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{H}_{si}=\boldsymbol{M}$$

至此,将式(14.6)展开成为分量形式的准备工作完结。只要把$\mathbb{J}$,$\mathbb{J}_i(i=1,2)$,$\boldsymbol{\omega}^*$,$\boldsymbol{\Omega}_i(i=1,2)$的有关分量表达式和式(14.17)、式(14.18)代入上式,便可最终地求得双自旋空间飞行器姿态动力学方程式在$Oxyz$中的分量形式

$$J_t\dot{\omega}_x^*-(J-J_t)\omega_y^*\omega_z^*-(J_1\Omega_1+J_2\Omega_2)\omega_z^*=M_x \tag{14.19a}$$

$$J\dot{\omega}_y^*=M_y \tag{14.19b}$$

$$J_t\dot{\omega}_z^*+(J-J_t)\omega_x^*\omega_y^*+(J_1\Omega_1+J_2\Omega_2)\omega_x^*=M_z \tag{14.19c}$$

或对于小姿态角

$$\begin{aligned}&J_t\ddot{\varphi}-[(2J_t-J)\omega_0+J_1\Omega_1+J_2\Omega_2]\dot{\psi}+\\&[(J-J_t)\omega_0^2-(J_1\Omega_1+J_2\Omega_2)\omega_0]\varphi=M_x\end{aligned} \tag{14.20a}$$

$$J\ddot{\vartheta}=M_y \tag{14.20b}$$

$$\begin{aligned}&J_t\ddot{\psi}+[(2J_t-J)\omega_0+J_1\Omega_1+J_2\Omega_2]\dot{\varphi}+\\&[(J-J_t)\omega_0^2-(J_1\Omega_1+J_2\Omega_2)\omega_0]\psi=M_z\end{aligned} \tag{14.20c}$$

可见俯仰通道独立于另外两通道的运动,而滚转和偏航是相互耦合的。

常用的双自旋空间飞行器,总有一体(例如B_1)相对空间飞行器坐标系$Oxyz$无运动,即$\boldsymbol{\Omega}_1=0$。对于这种飞行器,B_1可用作消旋平台。这种情况,B_1往往不是绕Oy的旋转体,它的转动惯量阵将与式(14.11)略有差别,成为

$$\underline{J}_1=\begin{bmatrix}J_{1x}&&\underline{0}\\&J_{1y}&\\\underline{0}&&J_{1z}\end{bmatrix} \tag{14.21}$$

由于这一变动,使得整个飞行器的转动惯量也变成

$$\begin{aligned}\mathbb{J}&=\underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{J}\,\underline{e}=\underline{e}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}J_x&&\underline{0}\\&J_y&\\\underline{0}&&J_z\end{bmatrix}\underline{e}\\J_x&=J_{1x}+J_{2t}+r_1^2m_1+r_2^2m_2\\J_y&=J_{1y}+J_2\\J_z&=J_{1z}+J_{2t}+r_1^2m_1+r_2^2m_2\end{aligned} \tag{14.22}$$

考虑转动惯量的变化,并令$\Omega_1=0$,通过式(14.6)可以求得,B_1体相对$Oxyz$固定不动的双自旋飞行器姿态运动方程如下

$$J_x\dot{\omega}_x^*-(J_y-J_z)\omega_y^*\omega_z^*-J_2\Omega_2\omega_z^*=M_x \tag{14.23a}$$

$$J_y\dot{\omega}_y^*-(J_z-J_x)\omega_z^*\omega_x^*=M_y \tag{14.23b}$$

$$J_z\dot{\omega}_z^*-(J_x-J_y)\omega_x^*\omega_y^*+J_2\Omega_2\omega_x^*=M_z \tag{14.23c}$$

当姿态角为小量,线性化后,得

$$J_x\ddot{\varphi}-[(J_x-J_y+J_z)\omega_0+J_2\Omega_2]\dot{\psi}+[(J_y-J_z)\omega_0^2-J_2\Omega_2\omega_0]\varphi=M_x \tag{14.24a}$$

$$J_y\ddot{\vartheta}=M_y \tag{14.24b}$$

$$J_z\ddot{\psi} + [(J_x - J_y + J_z)\omega_0 + J_2\Omega_2]\dot{\varphi} + [(J_y - J_x)\omega_0^2 - J_2\Omega_2\omega_0]\psi = M_z \tag{14.24c}$$

可见，上述两组方程中，俯仰运动仍是独立于偏航和滚转的，而后两者相互耦合着。

14.2 双自旋空间飞行器的章动

我们从式(14.19)入手，分析此类空间飞行器的章动，略去角速度分量右上方的 * 号，并令外力矩为零。从式(14.19b)求得

$$\omega_y = \Omega = \text{const}$$

把这个关系代入式(14.19a)和式(14.19c)，得

$$\dot{\omega}_x - \omega_p\omega_z = 0 \tag{14.25a}$$

$$\dot{\omega}_z + \omega_p\omega_x = 0 \tag{14.25b}$$

其中

$$\omega_p = \left(\frac{J - J_t}{J_t} + \frac{J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2}{J_t\Omega}\right)\Omega \tag{14.26}$$

从式(14.25a)求出 ω_z，代入式(14.25b)；再从式(14.25b)求出 ω_x，代入式(14.25a)，得

$$\ddot{\omega}_x + \omega_p^2\omega_x = 0 \tag{14.27a}$$

$$\ddot{\omega}_z + \omega_p^2\omega_z = 0 \tag{14.27b}$$

与13.1节中式(13.5)比较，只是下标不同，形式完全一样。因此，可以推论，双自旋空间飞行器是以式(14.26)的 ω_p 绕 Oy 作章动运动的。按照13.1节的结论，飞行器将出现一垂直于 Oy 轴的横向角速度 ω_t，其幅值为

$$\omega_{t0} = [\omega_x^2(0) + \omega_z^2(0)]^{1/2}$$

与 ω_x 和 ω_z 的初始角速度 $\omega_x(0)$ 及 $\omega_z(0)$ 有关，且以 ω_p 的速率绕 Oy 轴转动。如果考察 $Oxyz$ 飞行器坐标系，它绕 Oy 的角速度是 $\omega_y = \Omega$，而 ω_x 和 ω_z 可以合成横向角速度 ω_t，所以总的角速度是它们的矢量和

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\Omega} \tag{14.28}$$

这三个角速度所在平面(和13.1节一样)被称为纵向平面，见图14.2。图中同时绘出了飞行器的动量矩。考虑到 B_1 和 B_2 相对 $Oxyz$ 绕 Oy 以 Ω_1 和 Ω_2 转动，整个飞行器($Oxyz$ 系)绕 Oy 的角速度是 Ω，因此，纵向动量矩 h_a 应是上述三项之和；飞行器的横向动量矩 h_t，则是由 ω_t 形成的，总的角动量是

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_a + \boldsymbol{h}_t \tag{14.29}$$

而

$$\boldsymbol{h}_a = (J\Omega + J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{h}_t = J_t\boldsymbol{\omega}_t \tag{14.30}$$

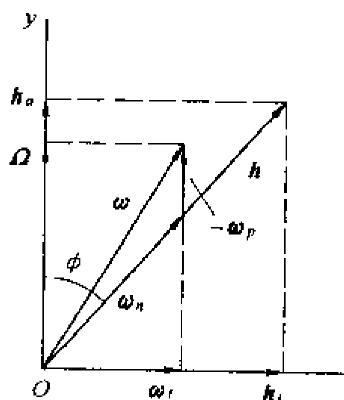


图 14.2　双自旋空间飞行器的章动

因此，章动角 φ 是

$$\tan\varphi=\frac{h_t}{h_a}=\frac{J_t\omega_t}{J\Omega+J_1\Omega_1+J_2\Omega_2} \tag{14.31}$$

上述问题都已在13.1节中详细分析,此处的实质没有改变,只在计算式上略有差别。在13.1节中还给出了**惯性和本体章动角速度**的概念(参见图13.8),对于双自旋飞行器,也有相同的参量(见图14.2)。在13.1中提到章动可被视为本体锥对空间锥的无滑滚动时,曾证明过章动还可被看成是空间飞行器相对纵平面的转动 $-\boldsymbol{\omega}_p$,而纵平面相对惯性空间以转动 $\boldsymbol{\omega}_n$,后者与 $\boldsymbol{h}$ 方向重合。在那里还称 $\boldsymbol{\omega}_p$ 为本体章动角速度,$\boldsymbol{\omega}_n$ 为惯性章动角速度。图14.2中的 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\omega}_n$ 和 $-\boldsymbol{\omega}_p$ 三角形就是借用上述概念的结果。在证实这一断言之前,先令 $-\omega_p=x$,如果通过计算证明 x 的数值恰为 $-\omega_p$,那么图14.2中对 $\boldsymbol{\omega}$ 的分解便是正确的。

由图14.2知,$x=\Omega-\omega_t/\tan\varphi$,把式(14.31)代入后,得

$$x=-\left(\frac{J-J_t}{J_t}+\frac{J_1\Omega_1+J_2\Omega_2}{J_t\Omega}\right)\Omega$$

和式(14.26)相比,显见 $x=-\omega_p$。证毕。

从图中还可求得 $\boldsymbol{\omega}_n$ 的大小,它是 $\omega_n^2=\omega_t^2+(\Omega+\omega_p)^2$,把式(14.26)代入再经化简,得

$$\omega_n=\frac{h}{J_t} \tag{14.32}$$

这和式(13.16)也是一样的。可见 $\boldsymbol{\omega}_p$ 和 $\boldsymbol{\omega}_n$ 分别是本情况的本体和惯性的章动角速度。

假如只考虑 $\boldsymbol{B}_1$(或 $\boldsymbol{B}_2$),我们还可以研究单独一个 $\boldsymbol{B}_1$(或 $\boldsymbol{B}_2$)体的章动。由于纵平面是惟一的,因此对于 $\boldsymbol{B}_1$ 体和 $\boldsymbol{B}_2$ 体来说,它们的纵平面也以 $\boldsymbol{\omega}_n$ 旋转,而对于单独的 B_1(或 B_2)它们的章动运动有如图14.3所示的情形(以 B_1 为例)。B_1 绕 Oy 轴相对惯性空间的角速度是 $\boldsymbol{\Omega}_1+\boldsymbol{\Omega}$,绕横轴的角速度是 $\boldsymbol{\omega}_t$,其合速度是 $\boldsymbol{\omega}_1$。这个合速度还可以按13.1节叙述的道理分解成惯性和本体章动角速度。上面已提到 B_1 也是以 $\boldsymbol{\omega}_n$ 为惯性章动角速度,它的本体章动角速度 $\boldsymbol{\omega}_{1p}$ 则应通过图中的速度三角形求出。显然有

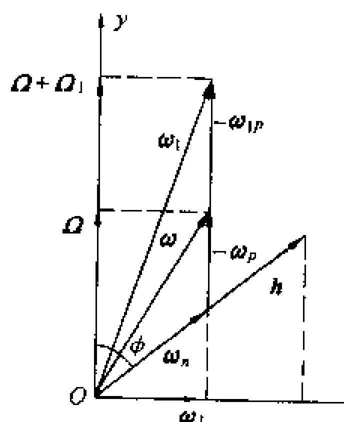


图14.3　单独考虑 $\boldsymbol{B}_1$ 的章动

$$-\omega_{1p}=\Omega_1+\Omega-\frac{\omega_t}{\tan\varphi}$$

将式(14.31)代入上式,考虑到式(14.26),得

$$\omega_{1p}=\omega_p-\Omega_1 \tag{14.33}$$

对于 B_2 体,它的惯性章动角速度也是 $\boldsymbol{\omega}_n$,而本体章动角速度是

$$\omega_{2p}=\omega_p-\Omega_2 \tag{14.34}$$

14.3　双自旋空间飞行器的稳定性

我们从常见的 B_1 相对 $Oxyz$ 空间飞行器坐标系无运动的情况入手，这种情况 B_1 的主惯性轴和 $Oxyz$ 三轴平行，但并不是绕 Oy 的旋转体，B_2 是绕 Oy 的旋转体。对应这种情况的方程式是式(14.23)，为了方便，略去角速度上的 * 号。式(14.23) 的稳态解是 $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = \Omega = \text{const}$。在稳态下如果出现小扰动，将有 $\omega_x = \delta\omega_x, \omega_y = \Omega + \delta\omega_y, \omega_z = \delta\omega_z$。如果略去二阶小，从式(14.23) 可以得到无外力矩的扰动方程式

$$J_x\delta\dot{\omega}_x - [(J_y - J_z)\Omega + J_2\Omega_2]\delta\omega_z = 0 \tag{14.35a}$$

$$J_y\delta\dot{\omega}_y = 0 \tag{14.35b}$$

$$J_z\delta\dot{\omega}_z + [(J_y - J_x)\Omega + J_2\Omega_2]\delta\omega_x = 0 \tag{14.35c}$$

式(14.35b) 给出 $\delta\omega_y = \text{const}$，说明叠加在飞行器自旋速率 Ω 上的扰动是一个常值，并不影响自旋轴的指向稳定。再研究式(14.35a) 和式(14.35c)，先改写其中的系数项，由于 $J_y\Omega + J_2\Omega_2$ 是自旋轴方向的角动量，即式(14.30) 中的 h_a；再设 y 轴的等效转动惯量为

$$J_y^* = \frac{h_a}{\Omega} = J_y + J_2\frac{\Omega_2}{\Omega} \tag{14.36}$$

它具有和转动惯量相同的因次，表示如果空间飞行器单纯以 Ω 旋转，其动量矩与 h_a 相等时的转动惯量。引入 J_y^* 之后，式(14.35) 中的系数

$$(J_y - J_z)\Omega + J_2\Omega_2 = h_a - J_z\Omega = (J_y^* - J_z)\Omega \tag{14.37}$$

$$(J_y - J_x)\Omega + J_2\Omega_2 = h_a - J_x\Omega = (J_y^* - J_x)\Omega \tag{14.38}$$

把式(14.37) 和式(14.38) 代入式(14.35a) 和式(14.35c)，经推演，得

$$\delta\ddot{\omega}_x + \frac{(J_y^* - J_z)}{J_x}\frac{(J_y^* - J_x)}{J_z}\Omega^2\delta\omega_x = 0$$

$$\delta\ddot{\omega}_z + \frac{(J_y^* - J_z)}{J_x}\frac{(J_y^* - J_x)}{J_z}\Omega^2\delta\omega_z = 0$$

由此，可见系统稳定条件是 $\delta\omega_x$ 和 $\delta\omega_z$ 的系数为正，这有两种可能，即

$$\text{i)}\quad J_z > J_y^*, J_x > J_y^* \tag{14.39}$$

$$\text{ii)}\quad J_z < J_y^*, J_x < J_y^* \tag{14.40}$$

这说明，当自旋轴的某效转动惯量为最大和最小值时，系统是旋转轴方向稳定的。这和单自旋空间飞行器无阻尼运动一致：绕最大和最小惯量轴旋转都是稳定的，而绕中间轴的转动却要分叉，它将逐渐过渡到最大或最小惯量轴。然而判断双自旋空间飞行器旋转稳定时，使用的自旋转动惯量并不是 J_y，而是在 J_y 基础上增加了 $J_2\frac{\Omega_2}{\Omega}$ 增量的 J_y^*（见式(14.36)）。如果再次使用惯量比 k_x 和 k_z（见式(12.14)），还可以求得与式(14.39) 和式(14.40) 等价的稳定条件是

$$\text{i)}\quad k_x + \frac{J_2\Omega_2}{J_x\Omega} > 0, k_z + \frac{J_2\Omega_2}{J_z\Omega} > 0 \tag{14.41a}$$

$$\text{ii)}\qquad k_x + \frac{J_2\Omega_2}{J_x\Omega} < 0,\ k_z + \frac{J_2\Omega_2}{J_z\Omega} < 0 \tag{14.41b}$$

式(14.41a)和式(14.41b)中包含两个参变量(参数组合)，为了进一步减小它们的数量，先把式中的参变量改造成

$$\frac{J_2\Omega_2}{J_x\Omega} = \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{J_z}{J_x}\right)^{1/2},\ \frac{J_2\Omega_2}{J_z\Omega} = \frac{J_2\Omega_2}{(J_zJ_x)^{1/2}\Omega}\left(\frac{J_x}{J_z}\right)^{1/2}$$

再对所得结果乘和除$(J_x - J_y + J_z)$，经运算(14.41)两式成为

$$\text{i)}\qquad k_x + \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{1-k_x}{1-k_z}\right)^{1/2} > 0$$

$$k_z + \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{1-k_z}{1-k_x}\right)^{1/2} > 0 \tag{14.42a}$$

$$\text{ii)}\qquad k_x + \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{1-k_x}{1-k_z}\right)^{1/2} < 0$$

$$k_z + \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{1-k_z}{1-k_x}\right)^{1/2} < 0 \tag{14.42b}$$

这是判断稳定性的最终条件，其中只有一个参变量 $J_2\Omega_2/((J_xJ_z)^{1/2}\Omega)$ 了。

图 14.4 是根据式(14.42a)和式(14.42b)绘制的稳定区域划分情况。当参数选择得当时，双自旋空间飞行器的旋转轴，既可以是最大也可是最小惯量轴。回忆一下，第十三章关于单自旋空间飞行器的分析，对于刚体飞行器，在没有能量损耗时，绕中间惯性轴的旋转是不稳定的。在中间惯性轴处，运动为分岔点，绕中间惯性轴的旋转不是逐渐过渡到绕最大惯性轴，就是绕最小惯性轴的转动(参考图 13.13 和图 13.14)。而从图 14.4 却可以看出，不仅绕最大或最小惯性轴，甚至绕中间惯性轴的旋转都有可能是稳定的，只要参变量选择合适即可。

14.4　有能量损耗的双自旋空间飞行器

当出现了能量损耗时，稳定区域与无能耗情况相比较，将有新的变化。

有能量损耗时，系统应稳定在最小能量状态，在偏离稳定点处于其邻域时，能量都要变大。这里所指能量是与姿态运动有关的动能，应包括飞行器的姿态运动、B_1 体和 B_2 体的转动、以及这两项运动之间的耦合动能。然而 B_1 和 B_2 体的转动能量是常量，因此只要研究空间飞行器姿态运动的能量，找到它的能量最小点，便可研究稳定状态。空间飞行器的角动量却不随能量的耗损而变化，在无外力作用的情况，它一直是恒定的矢量。

双自旋空间飞行器的能量和角动量是

$$2T = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = \underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}\,\underline{\omega} \tag{14.43}$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{i}J_x\omega_x + \boldsymbol{j}(J_y\omega_y + J_2\Omega_2) + \boldsymbol{k}J_z\omega_z = \mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbb{J}_2\cdot\boldsymbol{\Omega}_2$$

角动量的平方值是

$$h^2 = \underline{h}^{\mathrm{T}}\underline{h} = (\underline{J}\,\underline{\omega} + \underline{J}_2\,\underline{\Omega}_2)^{\mathrm{T}}(\underline{J}\,\underline{\omega} + \underline{J}_2\,\underline{\Omega}_2) \tag{14.44}$$

双自旋空间飞行器的稳定状态应该是，保持 h^2 不变条件下能量最小的状态。因此设

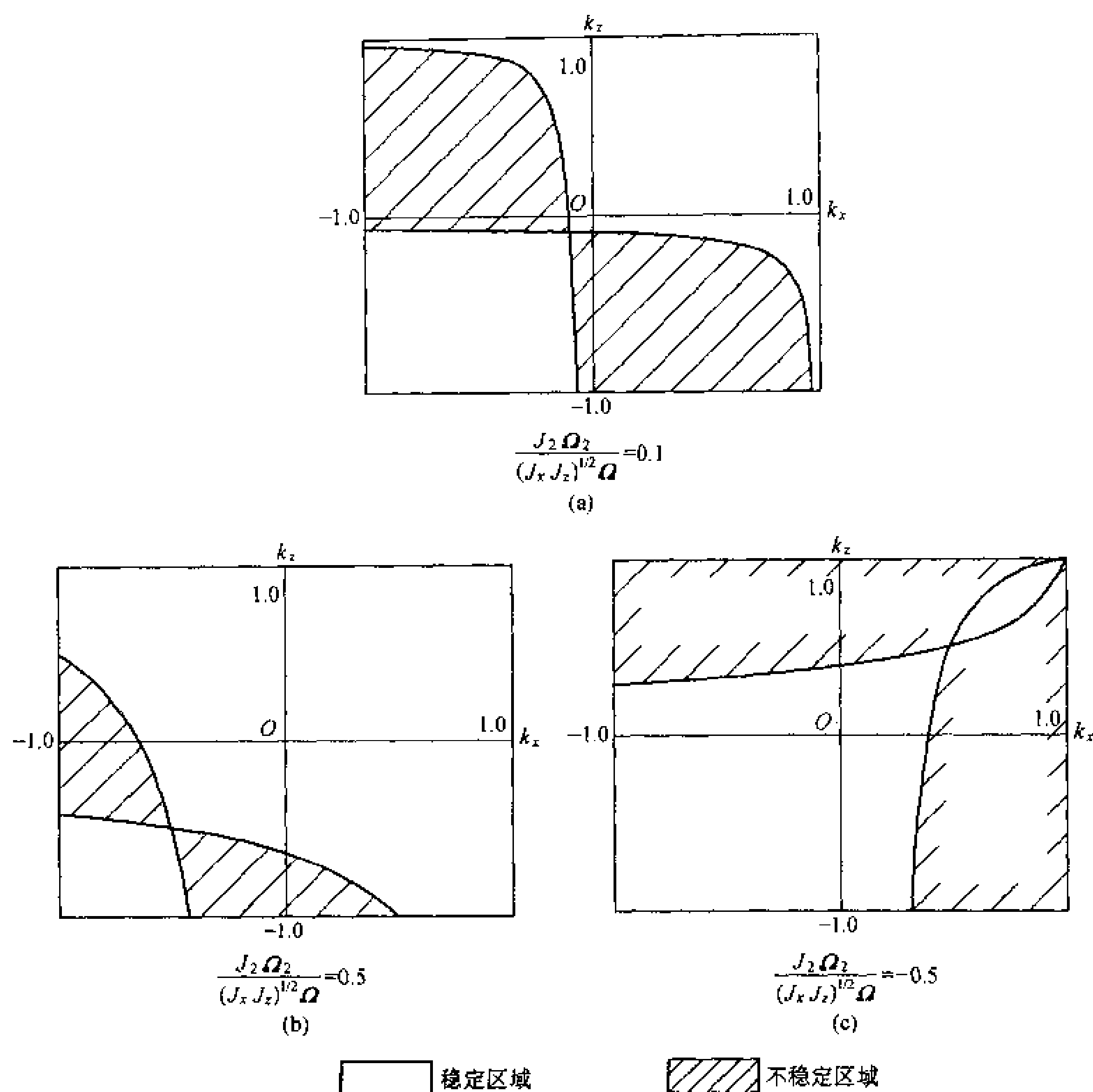


图 14.4　双自旋飞行器稳定域的划分

立如下函数

$$E = 2T - \sigma h^2 \tag{14.45}$$

其中的 σ 是折算系数，它和 h^2 相乘后有能量的因次，才能和 $2T$ 相减。E 达到最小时，能量也有最小值，因此应取

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\underline{\omega}}$$

把式(14.43) 和式(14.44) 代入上式，经推演得

$$\frac{1}{\sigma}\underline{\omega} = \underline{J}\,\underline{\omega} + \underline{J_2}\,\underline{\Omega_2} \tag{14.46}$$

把上述各量的分量代入之后，得

$$\frac{1}{\sigma}\omega_x = J_x\omega_x,\ \frac{1}{\sigma}\omega_y = J_y\omega_y + J_2\Omega_2,\ \frac{1}{\sigma}\omega_z = J_z\omega_z$$

它们正好满足运动稳态解条件 $\omega_x = \omega_z = 0, \omega_y = \Omega$(见第 14.3 节),因此由第二式,得

$$\frac{1}{\sigma} = J_y + \frac{J_2\Omega_2}{\Omega} \tag{14.47}$$

稳态受到扰动后,角速度成为 $\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}$,能量将出现一增量 ΔT,但无外力作用时角动量却不会变化。所以,根据式(14.43) 和式(14.44) 有

$$2T + 2\Delta T = (\underline{\omega} + \delta\underline{\omega})^{\mathrm{T}}\underline{J}(\underline{\omega} + \delta\underline{\omega})$$

$$h^2 = [\underline{J}(\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}) + \underline{J_2\Omega_2}]^{\mathrm{T}}[\underline{J}(\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}) + \underline{J_2\Omega_2}]$$

分别和式(14.43) 及式(14.44) 相减,得

$$2\Delta T = \delta\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}\delta\underline{\omega} + 2\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}\delta\underline{\omega} \tag{14.48}$$

$$\delta\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}^2\delta\underline{\omega} + 2(\underline{J}\,\underline{\omega} + \underline{J_2\,\Omega_2})^{\mathrm{T}}\underline{J}\delta\underline{\omega} = 0 \tag{14.49}$$

式(14.46)、式(14.48) 和式(14.49) 是研究自旋稳定的基本方程式。

把式(14.46) 代入式(14.49),还有

$$\delta\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}^2\sigma\underline{\omega} + \frac{2}{\sigma}\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}\delta\underline{\omega} = 0 \tag{14.50}$$

从式(14.50) 和式(14.48) 中消去 $\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}\sigma\underline{\omega}$,还可求得

$$2\frac{1}{\sigma}\Delta T = \delta\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\underline{J}(\frac{1}{\sigma}\underline{E} - \underline{J})\delta\underline{\omega} \tag{14.51}$$

把 $\delta\underline{\omega} = [\delta\omega_x \quad \delta\omega_y \quad \delta\omega_z]^{\mathrm{T}}$ 代入上式,有

$$2\frac{1}{\sigma}\Delta T = J_x(\frac{1}{\sigma} - J_x)(\delta\omega_x)^2 + J_y(\frac{1}{\sigma} - J_y)(\delta\omega_y)^2 + J_z(\frac{1}{\sigma} - J_z)(\delta\omega_z)^2$$

对于稳定的平衡态能量为最小,偏离平衡态时的能量增量 ΔT 自然应为正值。若以 $\frac{1}{\sigma}$ 乘上式,其左侧将恒为正,因此右侧也是正的,即

$$J_x\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{\sigma} - J_x)(\delta\omega_x)^2 + J_y\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{\sigma} - J_y)(\delta\omega_y)^2 + J_z\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{\sigma} - J_z)(\delta\omega_z)^2 > 0 \tag{14.52}$$

式中三个自变量并非完全独立,为找到它们之间的联系,取式(14.50)。考虑到 $\delta\omega$ 为小量,可以略去其中的二阶小,该式的分量形式是

$$\frac{1}{\sigma}(J_x\omega_x\delta\omega_x + J_y\omega_y\delta\omega_y + J_z\omega_z\delta\omega_z) = 0$$

前已经说明,对于平衡态有 $\omega_x = \omega_z = 0, \omega_y = \Omega$,所以由上式可导得 $\delta\omega_y = 0$,因而式(14.52) 成为

$$J_x\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{\sigma} - J_x)(\delta\omega_x)^2 + J_z\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{\sigma} - J_z)(\delta\omega_z)^2 > 0 \tag{14.53}$$

上式说明,当 $\frac{1}{\sigma} > 0$ 时,由上式可得如下的两个稳定条件:

$$\frac{1}{\sigma} - J_x > 0, \frac{1}{\sigma} - J_z > 0$$

把式(14.47) 代入上面两式,并做和式(14.42a) 和式(14.42b) 中相同的变换后,得如下以 k_x 和 k_z(见式(12.14)) 表示的条件

$$k_x + \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{1-k_z}{1-k_x}\right)^{1/2} > 0 \tag{14.54}$$

$$k_z + \frac{J_2\Omega_2}{(J_xJ_z)^{1/2}\Omega}\left(\frac{1-k_x}{1-k_z}\right)^{1/2} > 0 \tag{14.55}$$

而$\frac{1}{\sigma} < 0$时，式(14.53)将自然满足。上述稳定条件表示的稳定区域划分如图14.5所示。

对于B_1为轴对称的双自旋飞行器，由式(14.53)可以求得稳定条件是

$$\frac{1}{\sigma} > 0, \frac{1}{\sigma} - J_t > 0, \frac{1}{\sigma} < 0$$

其中，第二个条件被满足时，第一个也被满足，因此决定性的稳定条件是第二、三两个，或

$$k_t + \frac{J_2\Omega_2}{J_t\Omega} > 0, k_t + 1 + \frac{J_2\Omega_2}{J_t\Omega} < 0 \tag{14.56}$$

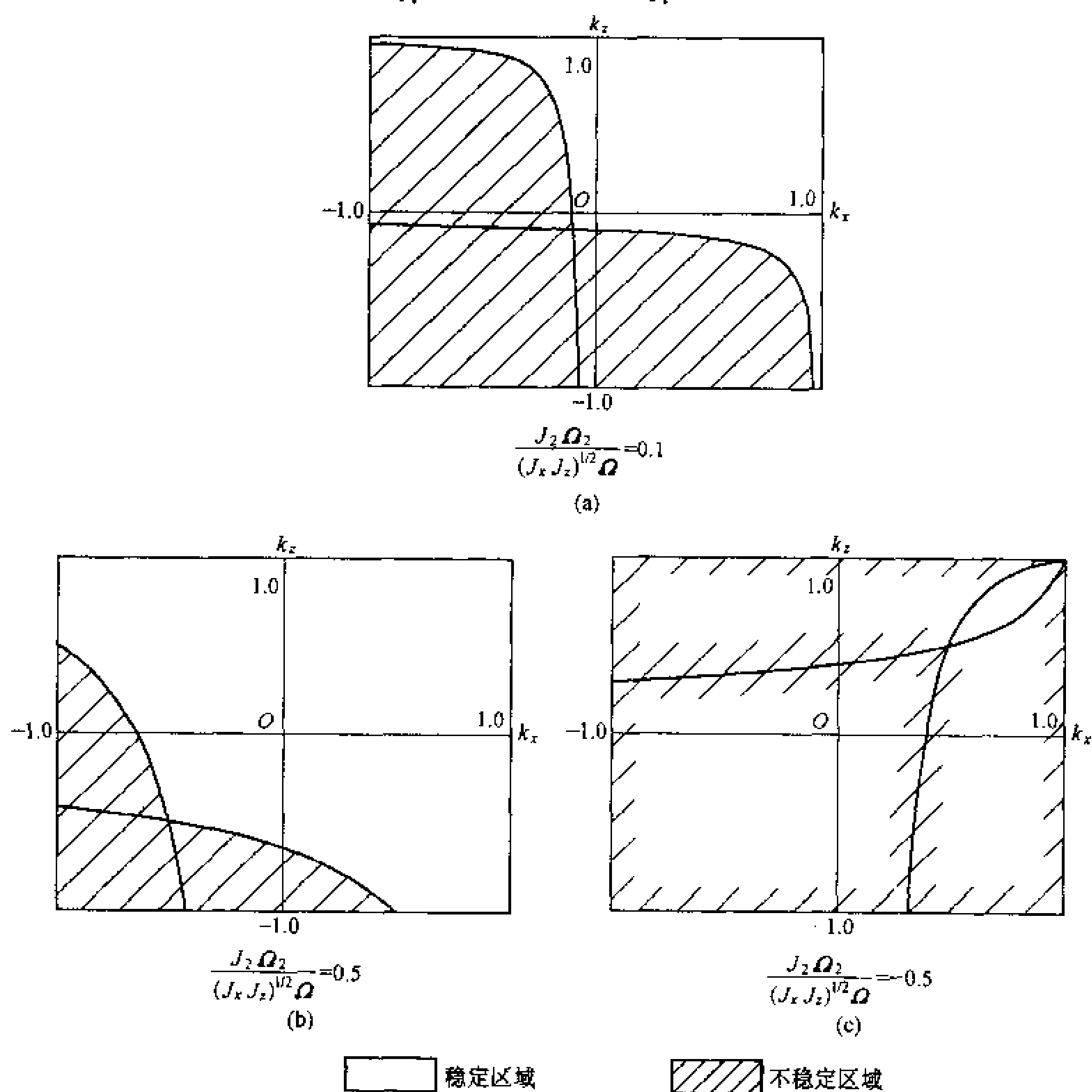


图14.5　有能耗的双自旋空间飞行器稳定域划分

它表示的稳定域划分如图 14.6 所示，其中的 k_t 见式(13.42)。显见，无论对于最大、最小，乃至中间惯量轴，都有稳定的可能，关键是要配好转子相对消旋平台的旋转速率。

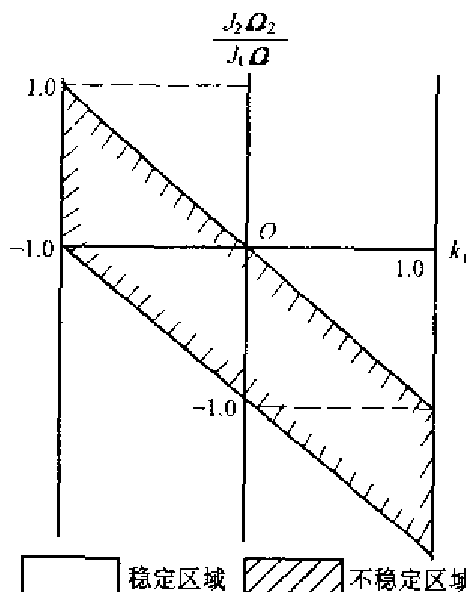


图 14.6　轴对称双自旋空间飞行器的稳定域划分

14.5　重力梯度力矩对双自旋空间飞行器的影响

我们研究在圆轨道上运行的双自旋飞行器，令自旋轴为 Oy，它在姿态角为零时与轨道坐标系同名轴重合。当姿态角为小角度时，重力梯度力矩见式(12.9)，即

$$M_x = 3\omega_0^2(J_z - J_y)\varphi$$

$$M_y = 3\omega_0^2(J_z - J_x)\vartheta$$

$$M_z = 0$$

因此，由式(14.24) 可以求得姿态运动方程式

$$\ddot{\varphi} - (1 - k_x + \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0})\omega_0\dot{\psi} + (4k_x - \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0})\omega_0^2\varphi = 0 \qquad (14.57\text{a})$$

$$\ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2(\frac{J_x - J_z}{J_y})\vartheta = 0 \qquad (14.57\text{b})$$

$$\ddot{\psi} + (1 - k_z + \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0})\omega_0\dot{\varphi} + (k_z - \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0})\omega_0^2\psi = 0 \qquad (14.57\text{c})$$

俯仰运动仍然是独立的，由式(14.57b) 可求俯仰稳定的条件是 $J_x > J_z$。用和 12.2 节相同的方法可以证明，这个条件就是

$$k_x > k_z \qquad (14.58)$$

这里的 k_x 和 k_z 见式(12.14)。

对于滚转和偏航两方向的运动方程，可用拉氏变换，改写成

$$\begin{bmatrix} s^2+(4k_x-\frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0})\omega_0^2 & -(1-k_x+\frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0})\omega_0 s \\ (1-k_z+\frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0})\omega_0 s & s^2+(k_z-\frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0})\omega_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(s)\\ \psi(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

其特征方程式是

$$s^4+a_2s^2+a_0=0 \tag{14.59}$$

其中

$$\begin{aligned} a_2 &= [4k_x-\frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0}+k_z-\frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0}+(1-k_z+\frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0})(1-k_x+\frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0})]\omega_0^2 \\ a_0 &= (4k_x-\frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0})(k_z-\frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0})\omega_0^4 \end{aligned} \tag{14.60}$$

如果改写上式中的有关项如下

$$\begin{aligned} \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0} &= \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0}\frac{J_y(J_x-J_y+J_z)}{J_x(J_x-J_y+J_z)}=\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0}\alpha_2 \\ \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0} &= \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0}\frac{J_y(J_x-J_y+J_z)}{J_z(J_x-J_y+J_z)}=\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0}\alpha_1 \\ \alpha_1 &= \frac{1-k_xk_z}{1-k_x},\ \alpha_2=\frac{1-k_xk_z}{1-k_z} \end{aligned} \tag{14.61}$$

把式(14.61)的三式代入式(14.60),应用稳定条件 $a_2>0, a_0>0$ 和 $a_2^2-4a_0>0$,便可求得稳定时应有

$$a_2^*=1+3k_z+k_xk_z-(k_x\alpha_1+k_z\alpha_2)\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0}+\alpha_1\alpha_2\left(\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0}\right)^2>0 \tag{14.62}$$

$$a_0^*=(4k_x-\alpha_2\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0})(k_z-\alpha_1\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0})>0 \tag{14.63}$$

$$a_2^{*}-4a_0^{*}>0 \tag{14.64}$$

综上所述,全部稳定条件是式(14.58)和式(14.62)～式(14.64),在 k_x 和 k_z 图中的稳定区域划分如图 14.7 所示。

14.6　双自旋空间飞行器的章动阻尼

和单自旋空间飞行器一样,章动运动应被阻尼掉,而主动阻尼器属于姿态控制的内容,本节只讨论被动阻尼。

姿态运动方程式的导出

图 14.8 是带有阻尼器的双自旋空间飞行器,和图 14.1 一样,B_1 和 B_2 分别是以 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 相对空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 转动的消旋平台和转子。O、O_1 和 O_2 是整个飞行器 B_1 和 B_2 的质心。在 B_1 和 B_2 上分别做固联坐标系 $O_1x_{b1}y_{b1}z_{b1}$ 和 $O_2x_{b2}y_{b2}z_{b2}$,它们在 $t=0$ 时刻与 $Oxyz$ 同名轴重合,在 t 时刻 Ox_{b1} 和 Ox_{b2} 与 Ox 之间的夹角分别是 $\Omega_1 t$ 和 $\Omega_2 t$。在 B_1(和 B_2)的 Ox_{b1}(和 Ox_{b2})轴上装有阻尼器,阻尼器由弹簧和阻尼阀作用下的活塞及活塞筒组

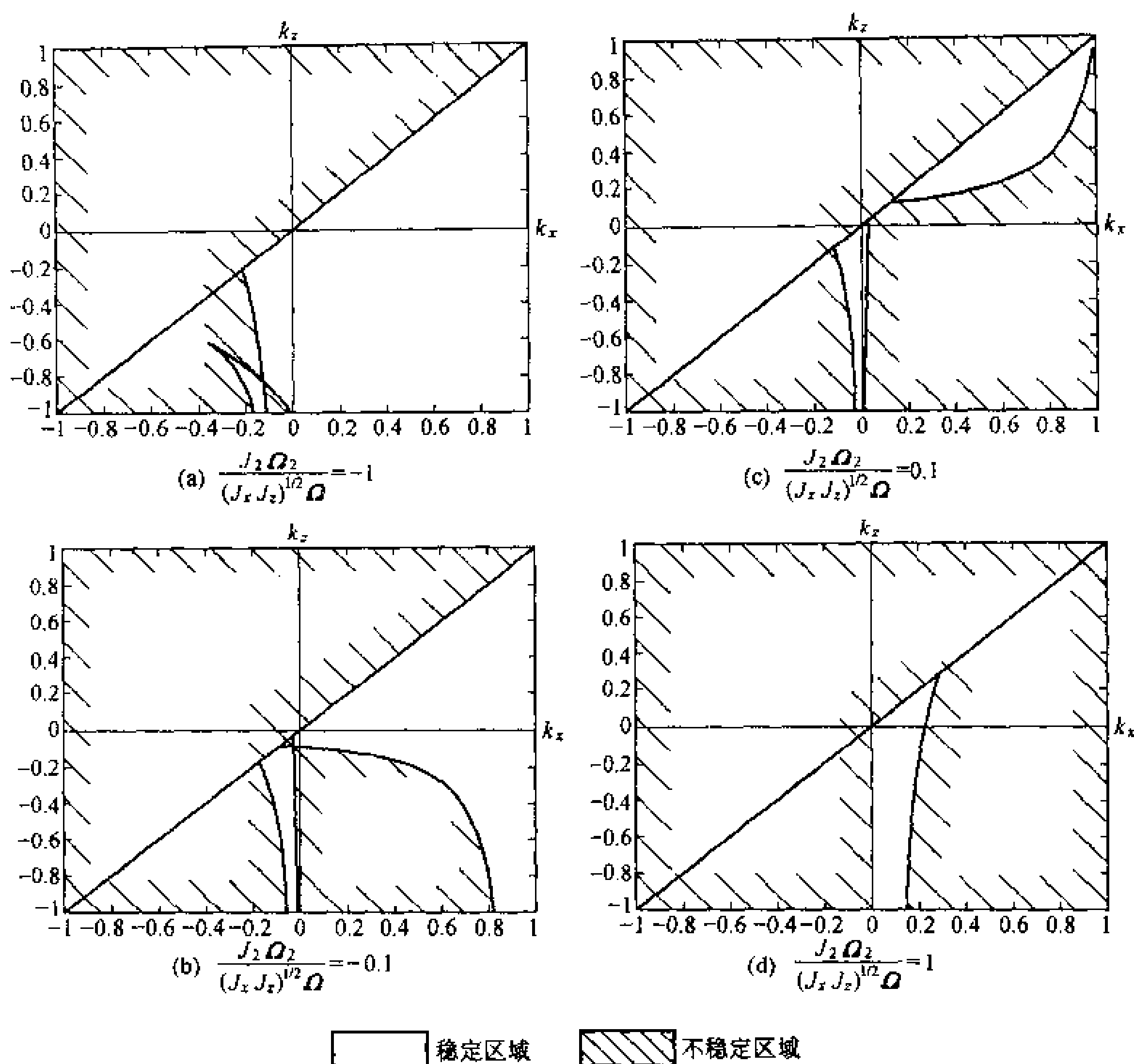


图 14.7 双自旋空间飞行器在圆轨道受重力梯度力矩影响时稳定域的划分

成，活塞的质量为 m_{d1}（和 m_{d2}），沿 Oy 轴运动，活塞的静平衡点在 Ox_{b1}（和 Ox_{b2}）轴上，运动时与平衡点的距离为 $\boldsymbol{\eta}_1$（和 $\boldsymbol{\eta}_2$），平衡点到质心 O_1（和 O_2）的距离是 l_1（和 l_2）。从 $Oxyz$ 到 $O_1x_{b1}y_{b1}z_{b1}$ 的坐标变换矩阵见式(10.27)，对图 14.8 的情况为

$$\underline{C}_{b1x}=\begin{bmatrix}\cos\Omega_1t & 0 & -\sin\Omega_1t\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\Omega_1t & 0 & \cos\Omega_1t\end{bmatrix} \tag{14.65}$$

同理，对于 B_2 有

$$\underline{C}_{b2x}=\begin{bmatrix}\cos\Omega_2t & 0 & -\sin\Omega_2t\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\Omega_2t & 0 & \cos\Omega_2t\end{bmatrix} \tag{14.66}$$

利用式(13.54)和 13.6 节的分析，如设 B_1 为轴对称体则 B_1 及其上阻尼器对 O_1 点的转动惯量，在 $Oxyz$ 中的分量是

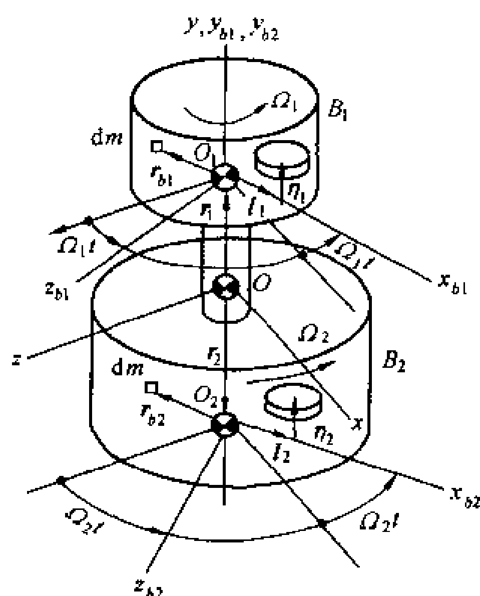


图 14.8　双自旋空间飞行器的章动阻尼

$$\underline{J}_1^* = \begin{bmatrix} J_{t1} & -l_1\eta_1 m_{d1}\cos\Omega_1 t & 0 \\ -l_1\eta_1 m_{d1}\cos\Omega_1 t & J_1 & l_1\eta_1 m_{d1}\sin\Omega_1 t \\ 0 & l_1\eta_1 m_{d1}\sin\Omega_1 t & J_{t1} \end{bmatrix} \tag{14.67}$$

对于轴对称的 B_2 和其上的阻尼器,对 O_2 点的转动惯量在 $Oxyz$ 中分解的结果是

$$\underline{J}_2^* = \begin{bmatrix} J_{t2} & -l_2\eta_2 m_{d2}\cos\Omega_2 t & 0 \\ -l_2\eta_2 m_{d2}\cos\Omega_2 t & J_2 & l_2\eta_2 m_{d2}\sin\Omega_2 t \\ 0 & l_2\eta_2 m_{d2}\sin\Omega_2 t & J_{t2} \end{bmatrix} \tag{14.68}$$

假如 O 点到 O_1 和 O_2 的矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$,利用$\mathbb{J}_1^*$ 和$\mathbb{J}_2^*$ 可以推得整个飞行器相对总质心 O 的转动惯量在 $Oxyz$ 中的分量是

$$\underline{J} = \underline{J}_1^* + \underline{J}_2^* + (\underline{r}_1^{\mathrm T}\underline{r}_1\underline{E} - \underline{r}_1\underline{r}_1^{\mathrm T})m_{d1} + (\underline{r}_2^{\mathrm T}\underline{r}_2\,\underline{E} - \underline{r}_2\,\underline{r}_2^{\mathrm T})m_{d2} =$$
$$\begin{bmatrix} J_t & -c_1(\eta) - c_2(\eta) & 0 \\ -c_1(\eta) - c_2(\eta) & J & s_1(\eta) + s_2(\eta) \\ 0 & s_1(\eta) + s_2(\eta) & J_t \end{bmatrix} \tag{14.69}$$

其中

$$J_t = J_{t1} + J_{t2} + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2, J = J_1 + J_2 \tag{14.70}$$

$$\begin{aligned} c_1(\eta) &= l_1 m_{d1}\eta_1\cos\Omega_1 t, \quad c_2(\eta) = l_2 m_{d2}\eta_2\cos\Omega_2 t \\ s_1(\eta) &= l_1 m_{d1}\eta_1\sin\Omega_1 t, \quad s_2(\eta) = l_2 m_{d2}\eta_2\sin\Omega_2 t \end{aligned} \tag{14.71}$$

在 B_1 和 B_2 上取微元体 $\mathrm{d}m$,它们到 O_1 和 O_2 点的矢径分别是 $\boldsymbol{r}_{b1}$ 和 $\boldsymbol{r}_{b2}$。如果设 O 点的速度(轨道速度)是 $\boldsymbol{v}_0$,并令

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_{b1}, \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_{b2} \tag{14.72}$$

则 B_1 体和 B_2 体上质量微元的速度和加速度是

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1 = &\dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_1) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}) + \\ &\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1}) + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b1}) + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{r}_{b1}\end{aligned} \tag{14.73}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2} \\ \boldsymbol{a}_2 &= \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_2) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2} + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2}) + \\ &\quad \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{b2}) + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{b2}) + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_2) \times \boldsymbol{r}_{b2}\end{aligned} \tag{14.74}$$

上两式中，$\boldsymbol{\omega}^*$ 是空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 相对惯性空间角速度，它是 $Oxyz$ 对轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 的姿态角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $OX_oY_oZ_o$ 对于惯性系角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 之和

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \tag{14.75}$$

如果把阻尼器活塞视为质点，并设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_1 &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{\eta}_1, \quad & \boldsymbol{g}_2 &= \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{\eta}_2 \\ \boldsymbol{\rho}_{d1} &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{\eta}_1, & \boldsymbol{\rho}_{d2} &= \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{\eta}_2\end{aligned} \tag{14.76}$$

则 m_{d1} 的速度和加速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{d1} &= \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{g}}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1} + \mathring{\boldsymbol{\eta}}_1 \\ \boldsymbol{a}_{d1} &= \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \ddot{\boldsymbol{g}}_1 = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_{d1} + \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{g}_1) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + \\ &\quad \mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}}_1 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + 2(\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}_1) \times \mathring{\boldsymbol{\eta}}_1 + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{\rho}_{d1}\end{aligned} \tag{14.77}$$

还可以从上式求得

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{d1} = &\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d1} + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + \\ &\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}}_1 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d1}) + 2(\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}_1) \times \mathring{\boldsymbol{\eta}}_1 + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_1) \times \boldsymbol{\rho}_{d1}\end{aligned} \tag{14.78}$$

同理，对于 m_{d2} 活塞有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{d2} = &\dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{g}_2) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{d2} + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + \\ &\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}}_2 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + 2(\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}_2) \times \mathring{\boldsymbol{\eta}}_2 + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_2) \times \boldsymbol{\rho}_{d2}\end{aligned} \tag{14.79}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{d2} = &\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d2} + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{d2} + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + \\ &\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}}_2 + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho}_{d2}) + 2(\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}_2) \times \mathring{\boldsymbol{\eta}}_2 + (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_2) \times \boldsymbol{\rho}_{d2}\end{aligned} \tag{14.80}$$

双自旋空间飞行器的姿态运动方程式，由相对 O 点的力矩平衡条件获得

$$\int_{B_1} \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{a}_1 \mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{a}_2 \mathrm{d}m + \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{a}_{d1} m_{d1} + \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{a}_{d2} m_{d2} = \boldsymbol{M} \tag{14.81}$$

考虑到 O、O_1 和 O_2 是飞行器 B_1 和 B_2 的质心，因此有

$$\begin{aligned}&\int_{B_1} \boldsymbol{\rho}_1 \mathrm{d}m + \int_{B_2} \boldsymbol{\rho}_2 \mathrm{d}m + \boldsymbol{g}_1 m_{d1} + \boldsymbol{g}_2 m_{d2} = 0 \\ &\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \mathrm{d}m + \boldsymbol{\rho}_{d1} m_{d1} = 0, \quad \int_{B_2} \boldsymbol{r}_{b2} \mathrm{d}m + \boldsymbol{\rho}_{d2} m_{d2} = 0\end{aligned} \tag{14.82}$$

需说明的是，由于活塞的运动（$\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$ 随时间的变化）使得质心 O_1、O_2 和 O 都是变动的。不过变量很小，分析中把它们的变动略去。

把式(14.73)、式(14.74)、式(14.77) 和式(14.79) 代入式(14.81)，并考虑到式(14.82) 各式，经推演得矢量姿态运动方程式

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^{*}+\boldsymbol{\omega}^{*}\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^{*}+\mathbb{J}_1\cdot\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1+\boldsymbol{\Omega}_1\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}_1+\mathbb{J}_2\cdot\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2+\boldsymbol{\Omega}_2\times\mathbb{J}_2\cdot\boldsymbol{\Omega}_2+\\
&\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{d1}\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{\rho}_{d1})]m_{d1}+\\
&\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[\boldsymbol{\Omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{d1}\times[\boldsymbol{\Omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\rho}_{d1})]m_{d1}+\\
&\int_{B_2}\boldsymbol{r}_{b2}\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\Omega}_2\times\boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{d2}\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\Omega}_2\times\boldsymbol{\rho}_{d2})]m_{d2}+\\
&\int_{B_2}\boldsymbol{r}_{b2}\times[\boldsymbol{\Omega}_2\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{r}_{b2})]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{d2}\times[\boldsymbol{\Omega}_2\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\rho}_{d2})]m_{d2}+\\
&\int_{B_1}\boldsymbol{r}_{b1}\times[(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\Omega}_1)\times\boldsymbol{r}_{b1}]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{d1}\times[(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\Omega}_1)\times\boldsymbol{\rho}_{d1}]m_{d1}+\\
&\int_{B_2}\boldsymbol{r}_{b2}\times[(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\Omega}_2)\times\boldsymbol{r}_{b2}]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{d2}\times[(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\Omega}_2)\times\boldsymbol{\rho}_{d2}]m_{d2}+\\
&\boldsymbol{g}_1\times[\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}}_1+2(\boldsymbol{\omega}^{*}+\boldsymbol{\Omega}_1)\times\mathring{\boldsymbol{\eta}}_1]m_{d1}+\boldsymbol{g}_2\times[\mathring{\mathring{\boldsymbol{\eta}}}_2+2(\boldsymbol{\omega}^{*}+\boldsymbol{\Omega}_2)\times\mathring{\boldsymbol{\eta}}_2]m_{d2}=\boldsymbol{M}
\end{aligned}
\tag{14.83}
$$

上式中

$$
\begin{aligned}
\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^{*}&=\int_{B_1}\boldsymbol{\rho}_1\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{*}\times\boldsymbol{\rho}_1)\mathrm{d}m+\int_{B_2}\boldsymbol{\rho}_2\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{*}\times\boldsymbol{\rho}_2)\mathrm{d}m+\\
&\quad\boldsymbol{g}_1\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{*}\times\boldsymbol{g}_1)m_{d1}+\boldsymbol{g}_2\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{*}\times\boldsymbol{g}_2)m_{d2}\\
\boldsymbol{\omega}^{*}\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^{*}&=\int_{B_1}\boldsymbol{\rho}_1\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\rho}_1)]\mathrm{d}m+\int_{B_2}\boldsymbol{\rho}_2\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{\rho}_2)]\mathrm{d}m+\\
&\quad\boldsymbol{g}_1\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{g}_1)]m_{d1}+\boldsymbol{g}_2\times[\boldsymbol{\omega}^{*}\times(\boldsymbol{\omega}^{*}\times\boldsymbol{g}_2)]m_{d2}\\
\mathbb{J}_i\cdot\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i&=\int_{B_i}\boldsymbol{r}_{bi}\times(\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i\times\boldsymbol{r}_{bi})\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{di}\times(\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i\times\boldsymbol{\rho}_{di})m_{di},\quad i=1,2\\
\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbb{J}_i\cdot\boldsymbol{\Omega}_i&=\int_{B_i}\boldsymbol{r}_{bi}\times[\boldsymbol{\Omega}_i\times(\boldsymbol{\Omega}_i\times\boldsymbol{r}_{bi})]\mathrm{d}m+\boldsymbol{\rho}_{di}\times[\boldsymbol{\Omega}_i\times(\boldsymbol{\Omega}_i\times\boldsymbol{\rho}_{di})m_{di},\quad i=1,2
\end{aligned}
\tag{14.84}
$$

$\mathbb{J}$ 是整个飞行器相对质心 O 的转动惯量并矢，在 $Oxyz$ 中的分量形式是式(14.69)，$\mathbb{J}_i$ 是 $B_i(i=1,2)$ 体相对各自质心 O_i 的转动惯量并矢，式(14.67) 和式(14.68) 是它们在 $Oxyz$ 中的分量表达式。

式(14.83) 中待求的变量是姿态角速度 $\boldsymbol{\omega}^{*}$ 和活塞位移 $\boldsymbol{\eta}_1$ 及 $\boldsymbol{\eta}_2$，还需要两个方程式，才能使问题封闭有解，这就是活塞运动方程。参考 13.6 节和式(13.60) 的推导过程，这两

方程可写为

$$m_{di}\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{di} + \boldsymbol{C}_{di}\mathring{\boldsymbol{\eta}}_i + k_{di}\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{F}_i, i = 1,2 \tag{14.85}$$

为将式(14.83)和式(14.85)变换成便于应用的分量形式,应依照附录3的规则逐项进行分量化。下面只取较繁琐的$\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m$ 项作为例子。先用矢量分析的恒等式将其改造为

$$\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m = -(\boldsymbol{\Omega}_1 \times \int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1})(\boldsymbol{r}_{b1}\mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{\omega}^*) \tag{14.86}$$

$\boldsymbol{r}_{b1}$ 在 $Ox_{b1}y_{b1}z_{b1}$ 中的分量形式是 $\boldsymbol{r}_{b1} = \underline{\boldsymbol{e}}^{(1)\mathrm{T}}[x_1 \quad y_1 \quad z_1]^{\mathrm{T}}$,其中 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)}$ 是 $O_1x_{b1}y_{b1}z_{b1}$ 的基矢,因此上式右侧积分是

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)\mathrm{T}}\int_{B_1} \underline{r}_{b1}\underline{r}_{b1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)} = \underline{\boldsymbol{e}}^{(1)\mathrm{T}}\int_{B_1}\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_1y_1 & y_1^2 & y_1z_1 \\ x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2 \end{bmatrix}\mathrm{d}m\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)}$$

考虑到 B_1 体是绕 O_1y_{b1} 的旋转体,易知上式右侧的非对角元素积分后是惯量积,其值为零。另外,B_1 的主轴转动惯量是 $J_t = \int_{B_1}(y_1^2 + z_1^2)\mathrm{d}m = \int_{B_1}(y_1^2 + x_1^2)\mathrm{d}m$, $J_1 = \int_{B_1}(x_1^2 + z_1^2)\mathrm{d}m$,由此求得$\int_{B_1} x_1^2\mathrm{d}m = \int_{B_1} z_1^2\mathrm{d}m = J_1/2$ 和$\int_{B_1} y_1^2\mathrm{d}m = J_t - J_1/2$,因此上式成为

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)\mathrm{T}}\int_{B_1} \underline{r}_{b1}\underline{r}_{b1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)} = \underline{\boldsymbol{e}}^{(1)\mathrm{T}}\begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)}$$

把它变换到 $Oxyz$ 中,得

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{C}_{xb1}\begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix}\underline{C}_{b1x}\underline{\boldsymbol{e}} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{e}}$$

考虑到角速度在 $Oxyz$ 中的分量是$\boldsymbol{\Omega}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}[0 \quad \Omega_1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^* = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}[\omega_x^* \quad \omega_y^* \quad \omega_z^*]^{\mathrm{T}}$,于是式(14.86)成为

$$\int_{B_1} \boldsymbol{r}_{b1} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{b1})]\mathrm{d}m = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\Omega}^{\times\mathrm{T}}\begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix}\underline{\omega}^* = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -J_1\Omega_1\omega_z^* \\ 0 \\ J_1\Omega_1\omega_x^* \end{bmatrix}$$

利用类似的方法,求出式(14.83)的各积分项的分量形式,再把其余项以分量式乘开,并略去二阶以上小量($\omega_x^*, \omega_z^*, \eta_1, \eta_2, m_{d1}$ 和 m_{d2} 为一阶小量),在 $\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_1 = \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_2 = 0$时求得姿态方程式的分量式为

$$\begin{aligned} &J_t\dot{\omega}_x^* - (J - J_t)\omega_y^*\omega_z^* + [s_1(\eta) + s_2(\eta)]\omega_y^{*2} + s_1(\eta)\Omega_1^2 + s_2(\eta)\Omega_2^2 - \\ &\quad [(J_1 - J_{t1})\Omega_1 + (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\omega_z^* + 2[s_1(\eta)\Omega_1 + s_2(\eta)\Omega_2]\omega_y^* + \\ &\quad m_{d1}l_1\ddot{\eta}_1\sin\Omega_1 t + m_{d2}l_2\ddot{\eta}_2\sin\Omega_2 t = M_x \end{aligned} \tag{14.87a}$$

$$J\dot{\omega}_y^* = M_y \tag{14.87b}$$

$$J_t\dot{\omega}_z^* + (J - J_t)\omega_x^*\omega_y^* + [c_1(\eta) + c_2(\eta)]\omega_y^{*2} + c_1(\eta)\Omega_1^2 + c_2(\eta)\Omega_2^2 + [(J_1 - J_{t1})\Omega_1 + (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\omega_x^* + 2[c_1(\eta)\Omega_1 + c_2(\eta)\Omega_2]\omega_y^* + m_{d1}l_1\ddot{\eta}_1\cos\Omega_1 t + m_{d2}l_2\ddot{\eta}_2\cos\Omega_2 t = M_z \tag{14.87c}$$

这是一组描述一般双自旋空间飞行器姿态运动的方程式，然而常用的双自旋空间飞行器是消旋平台相对轨道坐标系转速为零的，即 $\boldsymbol{\Omega}_1 = 0$。对于这类飞行器，又分为阻尼器装在消旋体 B_1 上和装在转子 B_2 上的两种，前者有 $\boldsymbol{\eta}_2 = 0$，而后者有 $\boldsymbol{\eta}_1 = 0$ 的条件。

因此，消旋平台 B_1 对轨道坐标系无转动，阻尼器装在 B_1 上时，式(14.87)变成

$$J_t\dot{\omega}_x^* - [(J - J_t)\omega_y^* + (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\omega_z^* = M_x \tag{14.88a}$$

$$J\dot{\omega}_y^* = M_y \tag{14.88b}$$

$$J_t\dot{\omega}_z^* + [(J - J_t)\omega_y^* + (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\omega_x^* + m_{d1}l_1(\ddot{\eta}_1 + \omega_y^{*2}\eta_1) = M_z \tag{14.88c}$$

而阻尼器装在 B_2 上，B_1 对轨道系不转的空间飞行器，式(14.87)成为

$$J_t\dot{\omega}_x^* - [(J - J_t)\omega_y^* + (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\omega_z^* + s_2(\eta)(\omega_y^{*2} + \Omega_2^2) + 2s_2(\eta)\Omega_2\omega_y^* + m_{d2}l_2\ddot{\eta}_2\sin\Omega_2 t = M_x \tag{14.89a}$$

$$J\dot{\omega}_y^* = M_y \tag{14.89b}$$

$$J_t\dot{\omega}_z^* + [(J - J_t)\omega_y^* + (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\omega_x^* + c_2(\eta)(\omega_y^{*2} + \Omega_2^2) + 2c_2(\eta)\Omega_2\omega_y^* + m_{d2}l_2\ddot{\eta}_2\cos\Omega_2 t = M_z \tag{14.89c}$$

为了给出上述方程以欧拉角描述的形式，应利用式(14.13)、式(14.14)和式(14.15)第一式。于是，对于 B_1 相对轨道系无转动，阻尼器装在 B_1 上的飞行器，认为 φ，ϑ 和 ψ 为一阶小量，而略去二阶以上小量，由式(14.88)可求得

$$J_t\ddot{\varphi} + [(J - 2J_t)\omega_0 - (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\dot{\psi} + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2]\varphi = M_x \tag{14.90a}$$

$$J\ddot{\vartheta} = M_y \tag{14.90b}$$

$$J_t\ddot{\psi} - [(J - 2J_t)\omega_0 - (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\dot{\varphi} + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2]\psi + m_{d1}l_1(\ddot{\eta}_1 + \omega_0^2\eta_1) = M_z \tag{14.90c}$$

对于 B_1 对轨道系无转动，但阻尼器装在转子 B_2 上的情况，由式(14.89)可求得

$$J_t\ddot{\varphi} + [(J - 2J_t)\omega_0 - (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\dot{\psi} + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2]\varphi + m_{d2}l_2[\ddot{\eta}_2 + (\omega_0 - \Omega_2)^2\eta_2]\sin\Omega_2 t = M_x \tag{14.91a}$$

$$J\ddot{\vartheta} = M_y \tag{14.91b}$$

$$J_t\ddot{\psi} - [(J - 2J_t)\omega_0 - (J_2 - J_{t2})\Omega_2]\dot{\varphi} + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2]\psi + m_{d2}l_2[\ddot{\eta}_2 + (\omega_0 - \Omega_2)^2\eta_2]\cos\Omega_2 t = M_z \tag{14.91c}$$

上述诸姿态动力学方程式中，各包含了四个变量：三个姿态运动量 ω_x、ω_y、ω_z 或 φ、ϑ、ψ；一个活塞运动位移 η_1 或 η_2。然而方程式数目只有三个，为了封闭有解，还得再推导一个独立的方程式，这就是活塞运动表达式。根据13.6节和式(13.60)，这个运动方程可写为

$$m_{di}\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{di} + C_{di}\dot{\boldsymbol{\eta}}_i + k_{di}\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{F}_i, i = 1,2 \tag{14.92}$$

其中，C_{di} 和 k_{di} 分别是 $B_i(i=1,2)$ 体上阻尼阀的粘性系数和活塞弹簧刚度，$\boldsymbol{F}_i$ 是活塞筒作用到活塞上的力，其方向垂直于 Oy 轴。用式(14.78)和式(14.80)消去上式中的 $\boldsymbol{\rho}_{di}$，把矢量改成分量形式，略去二阶以上小量后，写出沿 $\boldsymbol{\eta}_i$ 运动方向(Oy 方向)分量运动方程式。对于阻尼器在消旋体 B_1，且 B_1 对轨道系无转动的情况，有

$$m_{d1}l_1\dot{\omega}_z^* + m_{d1}l_1(\omega_x^*\omega_y^*) + m_{d1}\ddot{\eta}_1 + C_{d1}\dot{\eta}_1 + k_{d1}\eta_1 = 0 \tag{14.93}$$

以欧拉角表示时，是

$$m_{d1}l_1(\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi) + m_{d1}\ddot{\eta}_1 + C_{d1}\dot{\eta}_1 + k_{d1}\eta_1 = 0 \tag{14.94}$$

对于第二种情况，阻尼器在转子 B_2 上安装时，分别有

$$\begin{aligned} &m_{d2}l_2[\dot{\omega}_z^*\cos\Omega_2 t + \dot{\omega}_x^*\sin\Omega_2 t - (\omega_z^*\sin\Omega_2 t - \\ &\omega_x^*\cos\Omega_2 t)(\omega_y^* + 2\Omega_2)] + m_{d2}\ddot{\eta}_2 + C_{d2}\dot{\eta}_2 + k_{d2}\eta_2 = 0 \end{aligned} \tag{14.95}$$

和

$$\begin{aligned} &m_{d2}l_2[\ddot{\varphi}\sin\Omega_2 t + \ddot{\psi}\cos\Omega_2 t + 2(\dot{\varphi}\cos\Omega_2 t - \dot{\psi}\sin\Omega_2 t)\Omega_2 + \\ &(\omega_0^2 - 2\omega_0\Omega_2)(\varphi\sin\Omega_2 t + \psi\cos\Omega_2 t)] + m_{d2}\ddot{\eta}_2 + C_{d2}\dot{\eta}_2 + k_{d2}\eta_2 = 0 \end{aligned} \tag{14.96}$$

稳定性分析

从式(14.83)、式(14.87)～式(14.91)显见，俯仰运动是独立于另外两通道的，且可求得在不受外力时

$$\omega_y = 0 \text{ 或 } \dot{\vartheta} = \text{const} \tag{14.97}$$

因此，下面只分析相互耦合着的偏航和滚动通道，以及阻尼器的活塞运动，它们是相互耦合着的。

对于 B_1 消旋平台相对轨道坐标系无转动，阻尼器装在 B_1 上的情况，对式(14.90)和式(14.94)取拉式变换，再引进下述参数表达式

$$\begin{aligned} &k_t = \frac{J - J_t}{J_t}, k_{t2} = \frac{J_2 - J_{t2}}{J_t}, \hat{\Omega} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \\ &\omega_d^2 = \frac{k_{d1}}{m_{d1}}, \zeta = \frac{C_{d1}}{2m_{d1}\omega_d} \end{aligned} \tag{14.98}$$

之后，可求得

$$\begin{bmatrix} s^2 + (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)\omega_0^2 & (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2 - 1)\omega_0 s & 0 \\ -(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2 - 1)\omega_0 s & s^2 + (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)\omega_0^2 & \frac{m_{d1}l_1}{J_t}(s^2 + \omega_0^2) \\ 0 & l_1(s^2 + \omega_0^2) & s^2 + 2\omega_d\zeta s + \omega_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \\ \eta_1(s) \end{bmatrix} = 0$$

由此，得到特征方程式

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{14.99}$$

再设

$$\hat{I}_{d1} = \frac{I_{d1}}{J_t} = \frac{m_{d1}l_1^2}{J_t}, \quad \hat{\omega}_d = \frac{\omega_d}{\omega_0} \tag{14.100}$$

特征方程式中的系数有如下表达式

$$
\begin{aligned}
a_6 &= 1 - \hat{I}_{d1} \\
a_5 &= 2\omega_0\hat{\omega}_d\zeta \\
a_4 &= \omega_0^2[\hat{\omega}_d^2 + (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)^2 + 1 - \hat{I}_{d1}(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2 + 2)] \\
a_3 &= 2\omega_0^3[(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)^2 + 1]\hat{\omega}_d\zeta \\
a_2 &= \omega_0^4[(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)^2(\hat{\omega}_d^2 + 1) + \hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_{d1}(2k_t - 2k_{t2}\hat{\Omega}_2 + 1)] \\
a_1 &= 2\omega_0^5(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)^2\hat{\omega}_d\zeta \\
a_0 &= \omega_0^6[(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)^2\hat{\omega}_d^2 - (k_t - k_{t2}\hat{\Omega})\hat{I}_{d1}]
\end{aligned}
\tag{14.101}
$$

用附录 7 古尔维茨稳定性判断准则，系统如稳定，应有

$$a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$$

由式(14.101)易知，$a_5 > 0, a_3 > 0$ 和 $a_1 > 0$ 是显然的。

如令 $B = k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2$，若满足 $a_0 > 0$ 的要求应有 B 和 $B - \hat{I}_{d1}/\hat{\omega}_d^2$ 同号，即应满足

$$B > 0 \quad 和 \quad B > \frac{\hat{I}_{d1}}{\hat{\omega}_d^2}$$

或

$$B < 0 \quad 和 \quad B < \frac{\hat{I}_{d1}}{\hat{\omega}_d^2}$$

剔除这四个条件中的冗余式，稳定条件是：$B > \hat{I}_{d1}/\hat{\omega}_d^2$ 或 $B < 0$。如把 B 表达式代回后，稳定条件可被写为

$$\hat{\Omega}_2 < \left(k_t - \frac{\hat{I}_{d1}}{\hat{\omega}_d^2}\right)/k_{t2} \text{ 或 } \hat{\Omega}_2 > \frac{k_t}{k_{t2}} \tag{14.102}$$

$\Delta_3 > 0$ 的要求，通过将式(14.101)中的 $a_6, a_5, \cdots$ 等系数代入附录 7 中有关式，经化简得

$$\Delta_3 = a_5^2\omega_0^4 B(1 - B)(1 - B^2)$$

满足 $\Delta_3 > 0$ 的条件，有如下的组：$B > 0$(但 $B \neq 1$) 或 $B < -1$。把 B 表达式代回后，可写为

$$\hat{\Omega}_2 < \frac{k_t}{k_{t2}} \quad 或 \quad \hat{\Omega}_2 > \frac{k_t + 1}{k_{t2}} \tag{14.103}$$

把式(14.102)和式(14.103)绘在 $k_t - \hat{\Omega}_2$ 图上，有如图 14.9 所示的稳定区域划分。

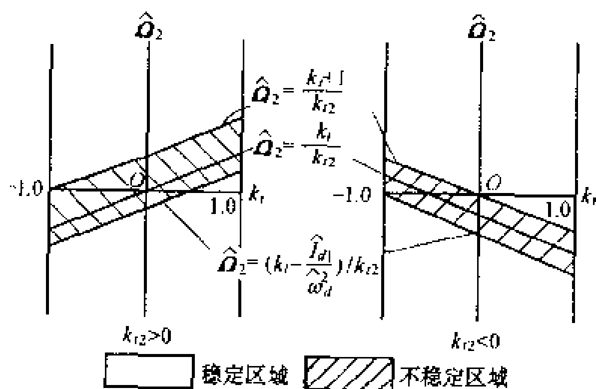


图 14.9　双自旋空间飞行器的稳定区域划分
（阻尼器装在消旋平台上）

还有最后一项要求需要分析，这就是 $\Delta_5 > 0$，然而把式(14.101)的系数代入 Δ_5 表达式中，到得 $\Delta_5 = 0$。这表明通过 Δ_5 不能判断系统稳定性，得再找其他途径。利用附录 9 定理 9.9 分析的结果是：只要 $B \neq 0$ 和 $B \neq 1$，系统就是渐近稳定的。有兴趣的读者，可参照式(13.77) ~ 式(13.81)的过程自行证明。这里所得的结论，并未出现比式(14.102)和式(14.103)更多的条件，因此，只要符合

式(14.102)和式(14.103)的要求,空间飞行器就是稳定的。

对于阻尼器装在转子上的情况,应从式(14.91)和式(14.96)出发,分析飞行器的稳定性。然而,它们因包含了自变量 t 的正余弦函数,使得分析工作十分复杂。因此,仍采用式(13.62),把右侧为零的式(14.91)和式(14.96)变换成

$$\ddot{\sigma}_1+[k_t-1-(k_{t2}-2)\hat{\Omega}_2]\omega_0\dot{\sigma}_3+[k_t-(k_{t2}-1)\hat{\Omega}_2](1-\hat{\Omega}_2)\omega_0^2\sigma_1=0 \quad (14.104a)$$

$$\ddot{\sigma}_2=0 \quad (14.104b)$$

$$\ddot{\sigma}_3+[k_t-1-(k_{t2}-2)\hat{\Omega}_2]\omega_0\dot{\sigma}_1+[k_t-(k_{t2}-1)\hat{\Omega}_2](1-\hat{\Omega}_2)\omega_0^2\sigma_3+\frac{m_{d2}l_2}{J_t}[\ddot{\eta}_2+(1-\hat{\Omega}_2)^2\omega_0^2\eta_2]=0 \quad (14.104c)$$

$$l_2\ddot{\sigma}_3+l_2(1-\hat{\Omega}_2)^2\omega_0^2\sigma_3+\ddot{\eta}_2+2\omega_d\zeta\dot{\eta}_2+k_{d2}\eta_2=0 \quad (14.104d)$$

对上述(a)、(c)、(d)式取拉氏变换,求得特征方程式,有如下形式

$$a_6s^6+a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$$

其中,各系数是

$$\begin{aligned}
a_6&=1-\hat{I}_{d2}\\
a_5&=2\omega_0\hat{\omega}_d\zeta\\
a_4&=\omega_0^2\{\hat{\omega}_d^2+(1-A)^2-(1-\hat{\Omega}_2)[A(2-\hat{I}_{d2})+2\hat{I}_{d2}(1-\hat{\Omega}_2)]\}\\
a_3&=2\omega_0^3\hat{\omega}_d\zeta[(1-A)^2-2A(1-\hat{\Omega}_2)]\\
a_2&=\omega_0^4\{[(1-A)^2-2A(1-\hat{\Omega}_2)]\hat{\omega}_d^2+A^2(1-\hat{\Omega}_2)^2-2\hat{I}_{d2}A(1-\hat{\Omega}_2)^3-\hat{I}_{d2}(1-\hat{\Omega}_2)^4\}\\
a_1&=2\omega_0^5A\hat{\omega}_d\zeta(1-\hat{\Omega}_2)^2\\
a_0&=\omega_0^6A(1-\hat{\Omega}_2)^2[A\hat{\omega}_d^2+\hat{I}_{d2}(1-\hat{\Omega})^3]
\end{aligned} \quad (14.105)$$

其中

$$\hat{I}_{d2}=\frac{m_{d2}l_2^2}{J_t},A=(k_{t2}-2)\hat{\Omega}_2-k_t \quad (14.106)$$

此类空间飞行器的稳定性分析,可借助附录6～9所列的任何一种方法进行,只是比较繁琐,读者可试着自己完成。

第十五章 三轴稳定空间飞行器

前面两章研究了靠绕某轴的旋转获得方向稳定性，使空间飞行器保持空间定向的功能。本章所要分析的空间飞行器相对中心星体的定向，需靠控制系统完成。此类飞行器其体固联坐标系（$Ox_by_bz_b$）和空间飞行器坐标系 $Oxyz$ 合二为一，绕它们坐标轴的姿态定向分别按规定的规律进行，又称为三轴稳定空间飞行器。

三轴稳定空间飞行器的控制执行机构，主要是反作用推力器和动量轮，它们的不同配合可以构成不同的分类。有全反作用推力器、全动量轮和动量轮与反作用推力器联合控制的三种三轴稳定空间飞行器，但最常应用的还是后面两种。

15.1 多动量轮空间飞行器姿态动力学方程式

动量轮是一个在电机驱动下高速运动的转子，其定子被安装在空间飞行器壳体上，在不产生控制力矩时，转子可以是不转动的(零动量轮)，也可以是以某一恒定转速旋转的(偏置动量轮)。当驱动电机以一定力矩让转子加速(或减速)时，作用在定子上的反作用力矩，通过安装部位的结构让空间飞行器向转子加速度相反方向运动，因此动量轮的控制作用是以转子的加速(或减速)旋转表现出来的。由于这种工作原理，动量轮又称为反作用飞轮或飞轮。还有一种动量轮，它的控制力矩不靠使转子加速或减速得到，而是令转子转速不变，通过改变自旋轴的方向形成陀螺力矩，让陀螺力矩控制空间飞行器的姿态。后面这种动量轮又被称为陀螺力矩器或控制力矩陀螺，图 15.1 是这两类动量轮的工作原理示意，(a) 是反作用飞轮，(b) 是陀螺力矩器。(b) 中转子被安装在框架上，以 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕 x_w 轴旋转，角动量为 $\boldsymbol{H} = \mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}$，若框架 y_w 轴以 $\dot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\Omega}_w$ 转动，则控制力矩沿负 e_w 方向，是 $\boldsymbol{M}_z = \boldsymbol{\Omega}_w \times \boldsymbol{H}$。

全反作用推力器控制的三轴稳定空间飞行器姿态动力学方程式，可以直接采用式(11.18)或式(11.19)，只要把 M_x，M_y 和 M_z 用反作用推力系统的力矩表示即可。

动量轮控制的三轴稳定空间飞行器姿态控制动力学方程式，因动量轮的动力学过程

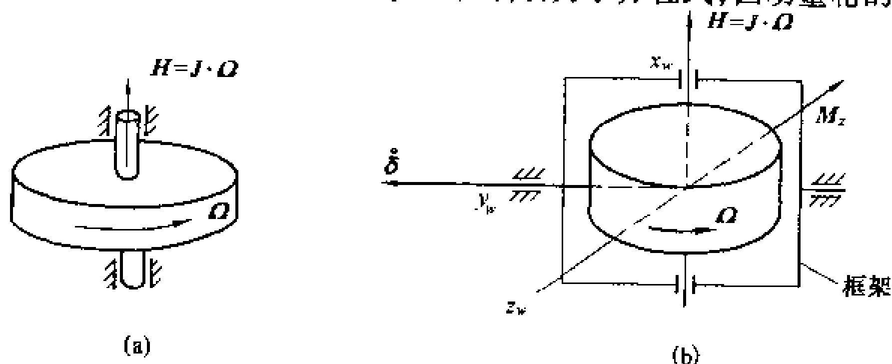


图 15.1　反作用飞轮和陀螺力矩器

比较复杂，须重新推导。

图 15.2 是推导它们所用的原理图，图中绘制的是陀螺力矩器，如果令框架旋转角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{wp}=0$，则得携带反作用动量轮空间飞行器的动力学方程式。图中 O 是包括全部动量轮的空间飞行器质心，其上安装有 P 个动量轮 $W_p(p=1,2,\cdots p)$，O_p 是动量轮 W_p 的质心。在 O 和 O_p 点取空间飞行器坐标系和动量轮框架坐标系，基矢分别是 $\underline{e}=[\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\underline{e}_p=[\boldsymbol{w}_{p1}\ \boldsymbol{w}_{p2}\ \boldsymbol{w}_{p3}]^{\mathrm{T}}$，它们都与主惯轴重合，$\underline{e}_p$ 的单位矢量之一（图中为 $\boldsymbol{w}_{p1}$）与转子对框架的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_p$ 重合，另一单位矢量（图中为

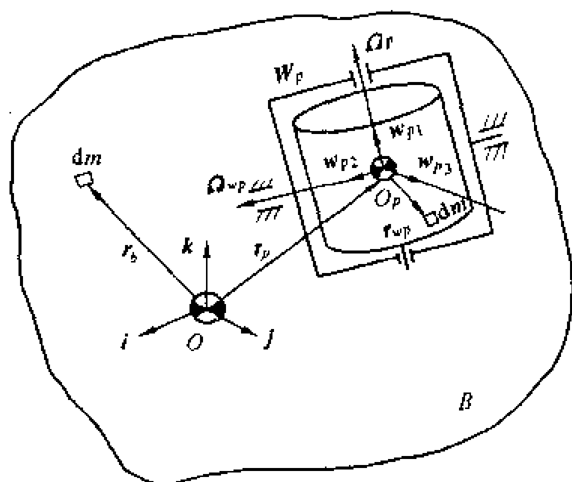


图 15.2　动量轮计算原理图

$\boldsymbol{w}_{p2}$）与框架 $\underline{e}_p$ 相对空间飞行器 $\underline{e}$ 的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{wp}$ 重合。令 $\boldsymbol{\omega}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 仍和前面各章一样，是轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 相对惯性空间和空间飞行器坐标系 $\underline{e}$ 相对轨道坐标系的角速度。再令

$$\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\omega} \tag{15.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_p=\boldsymbol{\Omega}_{wp}+\boldsymbol{\Omega}_p \tag{15.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}_p^*=\boldsymbol{\omega}^*+\boldsymbol{\omega}_p \tag{15.3}$$

在空间飞行器上和动量轮上各取一微元质量 $\mathrm{d}m$，它们距 O 和 O_p 矢距分别是 $\boldsymbol{r}_b$ 和 $\boldsymbol{r}_{wp}(p=1,2,\cdots,P)$，它们速度和加速度分别是

$$\boldsymbol{v}_b=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_b \tag{15.4}$$

$$\boldsymbol{a}_b=\boldsymbol{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}^*\times\boldsymbol{r}_b+\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_b) \tag{15.5}$$

和

$$\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_p+\boldsymbol{\omega}_p^*\times\boldsymbol{r}_{wp},\quad p=1,2,\cdots,P \tag{15.6}$$

$$\boldsymbol{a}_p=\boldsymbol{a}_o+\dot{\boldsymbol{\omega}}^*\times\boldsymbol{r}_p+\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_p)+\dot{\boldsymbol{\omega}}_p^*\times\boldsymbol{r}_{wp}+\boldsymbol{\omega}_p^*\times(\boldsymbol{\omega}_p^*\times\boldsymbol{r}_{wp}) \tag{15.7}$$

上述诸式中，$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{a}_0$ 是质心 O 点的绝对（轨道）速度和加速度。从式(15.3)还可求得 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_p^*=\dot{\boldsymbol{\omega}}^*+\dot{\boldsymbol{\omega}}_p$，代入上式后，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_p=&\boldsymbol{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}^*\times(\boldsymbol{r}_p+\boldsymbol{r}_{wp})+\boldsymbol{\omega}^*\times[\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{r}_p+\boldsymbol{r}_{wp})]+\dot{\boldsymbol{\omega}}_p\times\boldsymbol{r}_{wp}+\\&\boldsymbol{\omega}_p\times(\boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{r}_{wp})+\boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{r}_{wp})+\boldsymbol{\omega}_p\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}_{wp})\end{aligned} \tag{15.8}$$

由于 O 和 O_p 是空间飞行器和动量轮 W_p 的质心，因此还有

$$\int_B\boldsymbol{r}_b\mathrm{d}m+\sum_{p=1}^{P}\int_{w_p}(\boldsymbol{r}_{wp}+\boldsymbol{r}_p)\mathrm{d}m=0 \tag{15.9}$$

$$\int_{w_p}\boldsymbol{r}_{wp}\mathrm{d}m=0,p=1,2,\cdots,P \tag{15.10}$$

具有 P 个动量轮的三轴稳定空间飞行器姿态动力学方程式，可通过对 O 点的力矩平衡条件得到，即

$$\int_{B} \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{a}_b \mathrm{d}m + \sum_{p=1}^{P} \int_{w_p} (\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{wp}) \times \boldsymbol{a}_p \mathrm{d}m = \boldsymbol{M} \tag{15.11}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 是作用在空间飞行器上的外力矩之和。若把式(15.5) 和式(15.8) 代入上式，并考虑到式(15.9) 和式(15.10)，得

$$\begin{aligned}
&\int_{B} \boldsymbol{r}_b \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{r}_b)\mathrm{d}m + \sum_{p=1}^{P} \int_{w_p} (\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{wp}) \times [\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times (\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \\
&\int_{B} \boldsymbol{r}_b \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_b)]\mathrm{d}m + \sum_{p=1}^{P} \int_{w_p} (\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{wp}) \times \{\boldsymbol{\omega}^* \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{wp})]\}\mathrm{d}m + \\
&\sum_{p=1}^{P} \Big\{ \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \\
&\int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m \Big\} = \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{15.12}$$

上式中的 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_p$，可由式(15.2) 得 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_p$。然而，在控制空间飞行器过程中，我们最关心的并不是 $\boldsymbol{\Omega}_{wp}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_p$ 的绝对时间导数，而是它们相对空间飞行器的相对导数 $\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p$，因此有

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\Omega}_{wp} \times \boldsymbol{\Omega}_p \tag{15.13}$$

把式(15.13) 代入式(15.12) 后，考虑到式(附 3.36) 和式(附 3.41)，姿态动力学方程式可以改写为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \sum_{p=1}^{P} [\mathbb{J}_p \cdot (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p) + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbb{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p] + \\
&\sum_{p=1}^{P} \Big\{ \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\omega}_p) \times \boldsymbol{r}_{wp}]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\boldsymbol{\Omega}_{wp} \times \boldsymbol{\Omega}_p) \times \boldsymbol{r}_{wp}]\mathrm{d}m + \\
&\int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m \Big\} = \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{15.14}$$

式中，$\mathbb{J}$ 是整个空间飞行器(包括 P 个动量轮) 相对质心 O 的惯量并矢，$\mathbb{J}_p$ 是 W_p 动量轮相对自身质心 O_p 的惯量并矢。且有

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \int_{B} \boldsymbol{r}_b \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times \boldsymbol{r}_b)\mathrm{d}m + \sum_{p=1}^{P} \int_{w_p} (\boldsymbol{r}_{wp} + \boldsymbol{r}_p) \times [\dot{\boldsymbol{\omega}}^* \times (\boldsymbol{r}_{wp} + \boldsymbol{r}_p)]\mathrm{d}m \tag{15.15}$$

$$\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* = \int_{B} \boldsymbol{r}_b \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_b)]\mathrm{d}m + \sum_{p=1}^{P} \int_{w_p} (\boldsymbol{r}_{wp} + \boldsymbol{r}_p) \times \{\boldsymbol{\omega}^* \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{r}_{wp} + \boldsymbol{r}_p)]\}\mathrm{d}m \tag{15.16}$$

$$\mathbb{J}_p \cdot (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p) = \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p) \times \boldsymbol{r}_{wp}]\mathrm{d}m$$

$$\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbb{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p = \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m$$

显然，对于反作用动量轮系统，因框架固定在飞行器上，有 $\boldsymbol{\Omega}_{wp} = \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} = 0$，因此式(15.14) 成为

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \sum_{p=1}^{P} (\mathbb{J}_p \cdot \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p + \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbb{J}_p \cdot \boldsymbol{\Omega}_p) +$$

$$\sum_{p=1}^{P}\left\{\int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_p) \times \boldsymbol{r}_{wp}]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\Omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m\right\} = \boldsymbol{M} \tag{15.17}$$

而对于用陀螺力矩器控制的空间飞行器，其姿态动力学方程式，因转子转速固定($\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p = 0$)，而有

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \sum_{p=1}^{P}(\mathbb{J}_p \cdot \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_{wp} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p + \mathbb{J}_p \cdot (\boldsymbol{\Omega}_{wp} \times \boldsymbol{\Omega}_p)) + \sum_{p=1}^{P}\left\{\int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\omega}_p) \times \boldsymbol{r}_{wp}]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m\right\} = \boldsymbol{M} \tag{15.18}$$

下面分别对式(15.17) 和式(15.18) 作进一步分析。先研究反作用飞轮控制的空间飞行器。若以 $\boldsymbol{a}$ 表示转子自旋轴方向的单位矢量，即 $\boldsymbol{w}_{p1}$、$\boldsymbol{w}_{p2}$ 和 $\boldsymbol{w}_{p3}$ 之一，则转子角速度可写为 $\boldsymbol{\Omega}_p = \Omega_p \boldsymbol{a}$，转子在该方向的转动惯量是 J_p。因此，可以求得

$$\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbb{J}_p \cdot \boldsymbol{\Omega}_p = 0 \tag{15.19}$$

再把式(15.17) 中的积分利用矢量恒等式写成

$$\sum_{p=1}^{P}\int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [(\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_p) \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Omega}_p \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m + \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp} \times [\boldsymbol{\Omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}_{wp})]\mathrm{d}m = \sum_{p=1}^{P}[\mathbb{J}_p \cdot (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\Omega}_p) - \boldsymbol{\Omega}_p \times \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp}\boldsymbol{r}_{wp}\mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \times \int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp}\boldsymbol{r}_{wp}\mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{\Omega}_p] \tag{15.20}$$

如果把式(15.20) 视为包括了 $\boldsymbol{r}_{wp}\boldsymbol{r}_{wp}$ 不定乘积的混合积，并设 $\boldsymbol{r}_{wp}$ 在 $\underline{e}_p$ 中的分量是 $\underline{e}_p^{\mathrm{T}}[x_1, y_1, z_1]^{\mathrm{T}}$，有

$$\int_{w_p} \boldsymbol{r}_{wp}\boldsymbol{r}_{wp}\mathrm{d}m = \underline{e}_p^{\mathrm{T}}\int_{w_p}\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_1y_1 & y_1^2 & y_1z_1 \\ x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2 \end{bmatrix}\mathrm{d}m\underline{e}_p = \underline{e}_p^{\mathrm{T}}\int_{w_p}\begin{bmatrix} x_1^2 & & 0 \\ & y_1^2 & \\ 0 & & z_1^2 \end{bmatrix}\mathrm{d}m\underline{e}_p \tag{15.21}$$

由于转子 W_p 是轴对称体，上式矩阵非对角项积分后应为零，故有最右侧的对角阵关系式。为了确切，再设转子角速度 $\boldsymbol{\Omega}_p$ 的单位矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{w}_{p1}$ 重合，对于这种情况，转子纵向($\boldsymbol{a}$ 方向) 和横向(与 $\boldsymbol{a}$ 垂直) 的转动惯量 J_p 和 J_{pt}，$p = 1,2,\cdots,P$，是

$$J_p = \int_{w_p}(y_1^2 + z_1^2)\mathrm{d}m \tag{15.22}$$

$$J_{pt} = \int_{w_p}(x_1^2 + y_1^2)\mathrm{d}m = \int_{w_p}(x_1^2 + z_1^2)\mathrm{d}m \tag{15.23}$$

$$\int_{w_p} y_1^2 \mathrm{d}m = \int_{w_p} z_1^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2} J_p \tag{15.24}$$

于是求得

$$\int_{w_p} x_1^2 \mathrm{d}m = J_{pt} - \frac{1}{2} J_p \tag{15.25}$$

把这个结果代回式(15.21)，再代回式(15.20)，考虑到 $\boldsymbol{\Omega}_p$ 的方向为 $\boldsymbol{a}$(目前是 $\boldsymbol{w}_{p1}$)，因此式(15.20) 成为

$$\underline{\boldsymbol{e}}_p^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ J_p \Omega \omega_z^{*(p)} \\ -J_p \Omega \omega_y^{*(p)} \end{bmatrix}$$

上式的上标(p) 表示是在 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 基矢中分解的分量。再设

$$\boldsymbol{H}_p = J_p \Omega_p \boldsymbol{a} = \mathbb{J}_p \cdot \boldsymbol{\Omega}_p \tag{15.26}$$

是转子 W_p 相对框架的角动量，式(15.20) 可最终写成

$$\boldsymbol{\omega}^* \times \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p \tag{15.27}$$

把式(15.19) 和式(15.27) 代回式(15.17)，反作用动量轮控制的三轴稳定空间飞行器姿态动力学方程式(矢量形式) 成为

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \sum_{p=1}^{P} (\mathbb{J}_p \cdot \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{H}_p) = \boldsymbol{M} \tag{15.28}$$

为了把式(15.28) 变换成便于计算使用的分量形式，令有关矢量在 $Oxyz$ 中的分量形式是

$$\boldsymbol{\omega}^* = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{M} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} [M_x \quad M_y \quad M_z]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbb{J} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{J}}\, \underline{\boldsymbol{e}} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \underline{\boldsymbol{e}} \tag{15.29}$$

若在飞行器上安装四个反作用飞轮，W_1、W_2 和 W_3 为主控制轮，它们的单位矢量 $\boldsymbol{w}_{p1}$、$\boldsymbol{w}_{p2}$ 和 $\boldsymbol{w}_{p3}$($p = 1,2,3$) 分别与 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 平行(因此从 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 向 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 的坐标变换矩阵是单位阵)，而转子角速度 $\boldsymbol{\Omega}_1$、$\boldsymbol{\Omega}_2$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_3$ 分别平行于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ (图 15.3)。第四个反作用轮 W_4 是备份的冗余控制轮，当前三个动量轮之一出现故障时，均能以第四轮代替工作。备份轮的转子角速度 $\boldsymbol{\Omega}_4$ 取和 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 构成等角 α 的方向，因此从 $\underline{\boldsymbol{e}}_4$ 向 $Oxyz$ 的坐标变换矩阵是

$$\underline{C}_{xw_4} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & * & * \\ \cos\alpha & * & * \\ \cos\alpha & * & * \end{bmatrix} \tag{15.30}$$

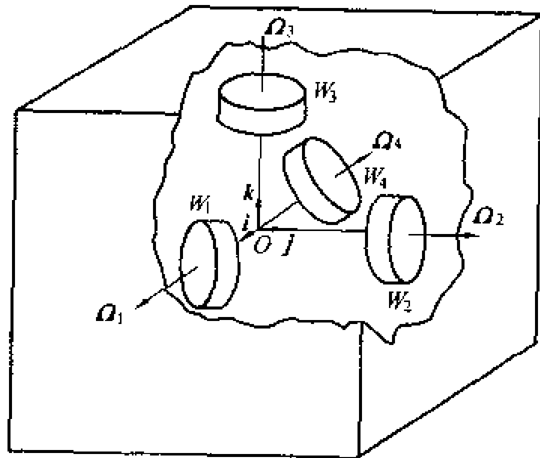


图 15.3　三主控一备份反作用动量轮三轴稳定空间飞行器

式中 * 是有关元素，因本节下面的运算中不出现它们，故不必给出具体形式。在确定了四个轮子的方向之后，它们的转动惯量$\mathbb{J}_p$在 $Oxyz$ 中的分量可以写成

$$\underline{J}_1 = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_{1t} & \\ 0 & & J_{1t} \end{bmatrix}, \underline{J}_2 = \begin{bmatrix} J_{2t} & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_{2t} \end{bmatrix}, \underline{J}_3 = \begin{bmatrix} J_{3t} & & 0 \\ & J_{3t} & \\ 0 & & J_3 \end{bmatrix} \tag{15.31}$$

W_4 动量轮在 $\underline{e}_4$ 中有

$$\underline{J}_4^{(4)} = \begin{bmatrix} J_4 & & 0 \\ & J_{4t} & \\ 0 & & J_{4t} \end{bmatrix} \tag{15.32}$$

在 $Oxyz$ 中是

$$\underline{J}_4 = \underline{C}_{xw_4}\underline{J}_4^{(4)}\underline{C}_{w_4x} \tag{15.33}$$

各反作用飞轮的转子角速度在 $Oxyz$ 中的分量是

$$\underline{\Omega}_1 = [\Omega_1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \underline{\Omega}_2 = [0 \quad \Omega_2 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \underline{\Omega}_3 = [0 \quad 0 \quad \Omega_3]^{T} \tag{15.34}$$

而 W_4 的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_4$ 在 $\underline{e}_4$ 中的分量是

$$\underline{\Omega}_4^{(4)} = [\Omega_4 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{15.35}$$

变换到 $Oxyz$ 后得

$$\underline{\Omega}_4 = \underline{C}_{xw_4}\underline{\Omega}_4^{(4)} = [1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}\Omega_4\cos\alpha \tag{15.36}$$

同理，还有 $\boldsymbol{H}_p$ 在 $Oxyz$ 中的分量关系

$$\begin{aligned} &\underline{H}_1 = [J_1\Omega_1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \underline{H}_2 = [0 \quad J_2\Omega_2 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \underline{H}_3 = [0 \quad 0 \quad J_3\Omega_3]^{\mathrm{T}} \\ &\underline{H}_4 = [1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}J_4\Omega_4\cos\alpha \end{aligned} \tag{15.37}$$

考虑到上述各分量变换式后，式(15.28)对于三主控一备份轮的三轴稳定空间飞行器姿态方程式成为

$$\begin{bmatrix} J_x\dot{\omega}_x - J_{xy}\dot{\omega}_y - J_{xz}\dot{\omega}_z - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z - J_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - J_{xz}\omega_x\omega_y + J_{xy}\omega_x\omega_z \\ -J_{xy}\dot{\omega}_x + J_y\dot{\omega}_y - J_{yz}\dot{\omega}_z - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x - J_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - J_{xy}\omega_y\omega_z + J_{yz}\omega_y\omega_x \\ -J_{xz}\dot{\omega}_x - J_{yz}\dot{\omega}_y + J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y - J_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - J_{yz}\omega_z\omega_x + J_{xz}\omega_z\omega_y \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} J_1\dot{\Omega}_1 + J_4\dot{\Omega}_4\cos\alpha + \omega_y(J_3\Omega_3 + J_4\Omega_4\cos\alpha) - \omega_z(J_2\Omega_2 + J_4\Omega_4\cos\alpha) \\ J_2\dot{\Omega}_2 + J_4\dot{\Omega}_4\cos\alpha + \omega_z(J_1\Omega_1 + J_4\Omega_4\cos\alpha) - \omega_x(J_3\Omega_3 + J_4\Omega_4\cos\alpha) \\ J_3\dot{\Omega}_3 + J_4\dot{\Omega}_4\cos\alpha + \omega_x(J_2\Omega_2 + J_4\Omega_4\cos\alpha) - \omega_y(J_1\Omega_1 + J_4\Omega_4\cos\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{15.38}$$

式中起正常控制作用的是 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_1$，$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_3$，当它们之一损坏，失去工作能力时，可以用 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_4$ 代替，继续完成姿态控制作用。

有时需将式(15.38)用欧拉角表示，对于小欧拉角的情况，根据第一章的结果，$\boldsymbol{\omega}^*$ 在 $Oxyz$ 中分解的结果是(见式(10.21))

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \omega_0\psi, \omega_y = \dot{\vartheta} - \omega_0, \omega_z = \dot{\psi} + \omega_0\varphi \tag{15.39}$$

和角加速度

$$\dot{\omega}_x = \ddot{\varphi} - \omega_0\dot{\psi}, \dot{\omega}_y = \ddot{\vartheta}, \dot{\omega}_z = \ddot{\psi} + \omega_0\dot{\varphi} \tag{15.40}$$

把它们代入式(15.38)即可。当 $Oxyz$ 坐标系与主惯性轴重合时，在略去二阶小量后，它们成为

$$\begin{bmatrix} J_x\ddot{\varphi} - (J_x - J_y + J_z)\omega_0\dot{\psi} + (J_y - J_z)\omega_0^2\varphi \\ J_y\ddot{\vartheta} \\ J_z\ddot{\psi} + (J_z - J_y + J_z)\omega_0\dot{\varphi} + (J_y - J_x)\omega_0^2\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1\dot{\Omega}_1 + J_4\dot{\Omega}_4\cos\alpha + \\ J_2\dot{\Omega}_2 + J_4\dot{\Omega}_4\cos\alpha + \\ J_3\dot{\Omega}_3 + J_4\dot{\Omega}_4\cos\alpha + \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} (\dot{\vartheta} - \omega_0)(J_3\Omega_3 + J_4\Omega_4\cos\alpha) - (\dot{\psi} + \omega_0\varphi)(J_2\Omega_2 + J_4\Omega_4\cos\alpha) \\ (\dot{\psi} + \omega_0\varphi)(J_1\Omega_1 + J_4\Omega_4\cos\alpha) - (\dot{\varphi} - \omega_0\psi)(J_3\Omega_3 + J_4\Omega_4\cos\alpha) \\ (\dot{\varphi} - \omega_0\psi)(J_2\Omega_2 + J_4\Omega_4\cos\alpha) - (\dot{\vartheta} - \omega_0)(J_1\Omega_1 + J_4\Omega_4\cos\alpha) \end{matrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{15.41}$$

由式(15.38)和式(15.41)式可见，当某一方向的动量轮对该轴进行控制(如 Ox 轴的动量轮产生控制量 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_1$)时，除了对滚转角 φ 产生控制作用外，还通过包含 Ω_1 的项对另外两通道形成耦合作用。至于冗余动量轮 W_4 的控制 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_4$，和它的交叉耦合影响 Ω_4，在三个通道都是相等的。

下面再来推导带有陀螺力矩器的三轴稳定空间飞行器姿态动力学方程式。为简便，只设沿三根坐标轴有三个力矩器 W_1，W_2 和 W_3。和动量轮一样，当框架转角为零时 $\boldsymbol{w}_{p1}$，$\boldsymbol{w}_{p2}$ 和 $\boldsymbol{w}_{p3}(p = 1,2,3)$ 分别与 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 重合，并设其中的 $\boldsymbol{w}_{11}$，$\boldsymbol{w}_{22}$ 和 $\boldsymbol{w}_{33}$ 是转子轴方向的单位矢量，也是框架轴转角为零时的 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 方向；再设 $\boldsymbol{w}_{13}$，$\boldsymbol{w}_{21}$ 和 $\boldsymbol{w}_{32}$ 分别是框架轴，绕该轴的转角以 δ_{13}，δ_{21} 和 δ_{32} 表示(见图 15.4)，$\boldsymbol{M}_{12}$、$\boldsymbol{M}_{23}$、$\boldsymbol{M}_{31}$ 是各该陀螺力矩器的反作用力矩，它们被分解到有关轴上成为控制和交叉力矩。从 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 向 $\underline{\boldsymbol{e}}_1\underline{\boldsymbol{e}}_2$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ 的变换矩阵分别是

$$\underline{C}_{1x} = \begin{bmatrix} \cos\delta_{13} & \sin\delta_{13} & 0 \\ -\sin\delta_{13} & \cos\delta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_{2x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_{21} & \sin\delta_{21} \\ 0 & -\sin\delta_{21} & \cos\delta_{21} \end{bmatrix} \tag{15.42}$$

$$\underline{C}_{3x} = \begin{bmatrix} \cos\delta_{32} & 0 & -\sin\delta_{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\delta_{32} & 0 & \cos\delta_{32} \end{bmatrix}$$

陀螺力矩器转子的惯量并矢 $\mathbb{J}_p$ 和角速度 $\boldsymbol{\Omega}_p$ 及其在 $\boldsymbol{e}_p(p = 1,2,3)$ 中的分量，仍然是式(15.31)和式(15.34)，其框架的转动惯量被略去，它们的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{wp}(p = 1,2,3)$，可由图 15.4 求得

$$\boldsymbol{\Omega}_{w1} = \underline{\boldsymbol{e}}_1^{\mathrm{T}}[0 \quad 0 \quad \dot{\delta}_{13}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{w2} = \underline{\boldsymbol{e}}_2^{\mathrm{T}}[\dot{\delta}_{21} \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{w2} = \underline{\boldsymbol{e}}_3^{\mathrm{T}}[0 \quad \dot{\delta}_{32} \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{15.43}$$

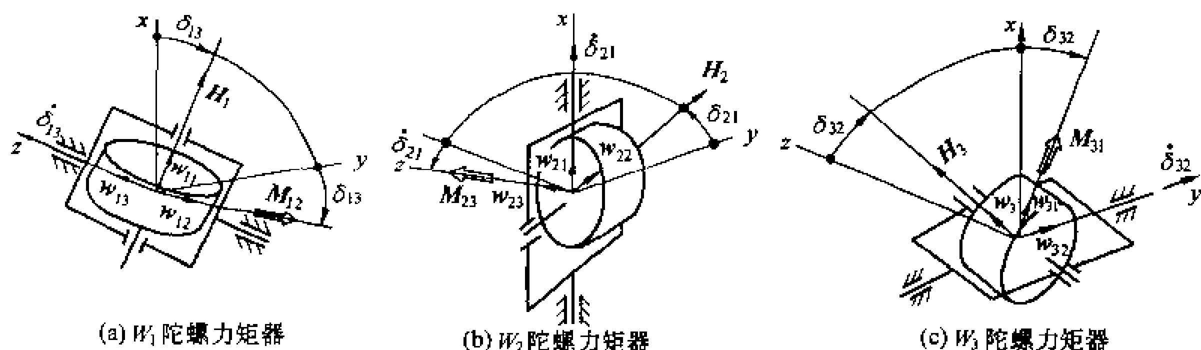


图 15.4　陀螺力矩器的安装

利用式(15.42)，把上述矢量的分量变换到 $Oxyz$ 坐标系中，再代入式(15.18)，使后者成为

$$\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^*+\boldsymbol{\omega}^*\times\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^*+\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}J_{2t}\ddot{\delta}_{21}-H_1\dot{\delta}_{13}\sin\delta_{13}+H_3\dot{\delta}_{32}\cos\delta_{32}\\ J_{3t}\ddot{\delta}_{32}-H_2\dot{\delta}_{21}\sin\delta_{21}+H_1\dot{\delta}_{13}\cos\delta_{13}\\ J_{1t}\ddot{\delta}_{13}-H_3\dot{\delta}_{32}\sin\delta_{32}+H_2\dot{\delta}_{21}\cos\delta_{21}\end{bmatrix}+$$

$$2\sum_{p=1}^{3}\mathbb{J}_p\cdot(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\omega}_p)=\boldsymbol{M}\qquad(15.44)$$

式中的 H_1、H_2 和 H_3 仍以式(15.26)和式(15.37)表示，控制项是 $H_3\dot{\delta}_{32}\cos\delta_{32}$（$Ox$ 轴方向），$H_1\dot{\delta}_{13}\cos\delta_{13}$（$Oy$ 轴方向）和 $H_2\dot{\delta}_{21}\cos\delta_{21}$（$Oz$ 轴方向），事实上它们是转子改变角速度方向时产生的交叉轴上的陀螺力矩，这也是此类飞轮控制器被命名为陀螺力矩器的原因。分量形式的其他项，除包含 $\ddot{\delta}_{21}$ 等二阶导数项是加速力矩外，其余本质上为陀螺力矩的交叉影响项。可见让空间飞行器绕某轴（如 Ox）旋转的力矩，并非由沿该轴安装的陀螺力矩器产生的，而是与之垂直的另一轴（Oz）的陀螺力矩器转子角速度绕第二个垂直轴（Oy）转动的结果。

式(15.44)左侧最后项以附录3的方法展成分量形式，成为

$$2\sum_{p=1}^{4}\mathbb{J}_p\cdot(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\omega}_p)=$$

$$2\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\left\{\begin{bmatrix}(J_{1t}-J_1)\dot{\delta}_{13}\omega_x^*\cos\delta_{13}\sin\delta_{13}+(J_{1t}\sin^2\delta_{13}+J_1\cos^2\delta_{13})\dot{\delta}_{13}\omega_y^*-J_{1t}\Omega_1\omega_z^*\sin\delta_{13}\\ -(J_{1t}\cos^2\delta_{13}-J_1\sin^2\delta_{13})\dot{\delta}_{13}\omega_x^*-(J_{1t}-J_1)\dot{\delta}_{13}\omega_y^*\sin\delta_{13}\cos\delta_{13}+J_{1t}\Omega_1\omega_z^*\cos\delta_{13}\\ J_{1t}\Omega_1\omega_x^*\sin\delta_{13}-J_{1t}\Omega_1\omega_y^*\cos\delta_{13}\end{bmatrix}+\right.$$

$$\begin{bmatrix}J_{2t}\Omega_2\omega_y^*\sin\delta_{21}-J_{2t}\Omega_2\omega_z^*\cos\delta_{13}\\ -J_{2t}\Omega_2\omega_x^*\sin\delta_{21}+(J_{2t}-J_2)\dot{\delta}_{21}\omega_y^*\sin\delta_{21}\cos\delta_{21}+(J_{2t}\sin^2\delta_{21}+J_2\cos^2\delta_{21})\dot{\delta}_{21}\omega_z^*\\ J_{2t}\Omega_2\omega_x^*\cos\delta_{21}-(J_{2t}\cos^2\delta_{21}-J_2\sin^2\delta_{21})\dot{\delta}_{21}\omega_y^*-(J_{2t}-J_2)\dot{\delta}_{21}\omega_z^*\sin\delta_{21}\cos\delta_{21}\end{bmatrix}+$$

$$\left.\begin{bmatrix}-(J_{3t}-J_3)\dot{\delta}_{32}\omega_x^*\sin\delta_{32}\cos\delta_{32}+J_{3t}\Omega_3\omega_y^*\cos\delta_{32}-(J_{3t}\cos^2\delta_{32}+J_3\sin^2\delta_{32})\dot{\delta}_{32}\omega_z^*\\ -J_{3t}\Omega_3\omega_x^*\cos\delta_{32}+J_{3t}\Omega_3\omega_z^*\sin\delta_{32}\\ (J_{3t}\sin^2\delta_{32}+J_3\cos^2\delta_{32})\dot{\delta}_{32}\omega_x^*-J_{3t}\Omega_3\omega_y^*\sin\delta_{32}+(J_{3t}-J_3)\dot{\delta}_{32}\omega_z^*\sin\delta_{32}\cos\delta_{32}\end{bmatrix}\right\}$$

如果在同一通道安装两个相同的陀螺力矩器(图 15.5),在框架转角为零时它们转子

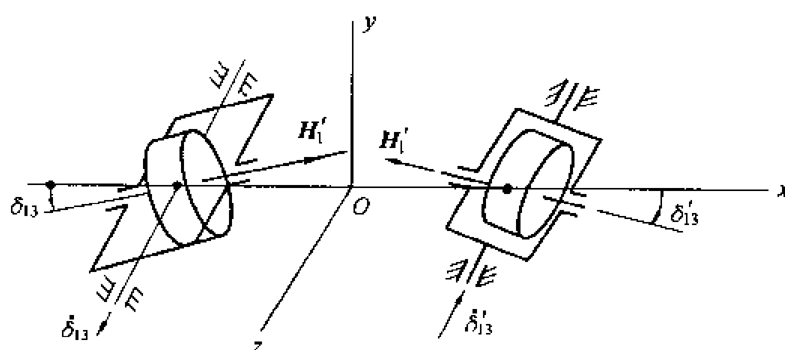


图 15.5　沿 Ox 安装的双陀螺力矩器

角速度矢量共线,但方向相反,它们借以产生控制力矩的框架角转轴是平行的,但通过机械机构保持反相旋转。图 15.5 表示 Ox 轴方向的双陀螺力矩器,它们以相同的框架角绕 Oz 轴反向同步旋转,在任意时刻都有 $\delta_{13} = -\delta'_{13}$。如果在 Oy 和 Oz 方向也安装类似的双陀螺力矩器,在框架转角等于零时,转子角速度分别与这两轴重合。它们的框架也是反向同步旋转的,Oy 方向陀螺力矩器的框架转轴是 Ox,而 Oz 方向的是 Oy 轴。在略去框架转动惯量的条件下,把式(15.44) 中 $\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij}, \ddot{\delta}_{ij}$ 和 H_i 以 $-\delta_{ij}, -\dot{\delta}_{ij}, -\ddot{\delta}_{ij}$ 和 $-H_i, (i, j = 1,2,3)$ 代替,再与原矩阵相加,就得到双陀螺力矩器三轴稳定空间飞行器的姿态动力学方程式

$$
\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + 2\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} H_3 \dot{\delta}_{32} \cos\delta_{32} \\ H_1 \dot{\delta}_{13} \cos\delta_{13} \\ H_2 \dot{\delta}_{21} \cos\delta_{21} \end{bmatrix} +
$$

$$
4\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \left\{ \begin{bmatrix} (J_{1t} - J_1) \dot{\delta}_{13} \omega_x^* \sin\delta_{13} \cos\delta_{13} - J_{1t} \Omega_1 \omega_z^* \sin\delta_{13} \\ -(J_{1t} - J_1) \dot{\delta}_{13} \omega_y^* \sin\delta_{13} \cos\delta_{13} \\ J_{1t} \Omega_1 \omega_x^* \sin\delta_{13} \end{bmatrix} + \right.
$$

$$
\begin{bmatrix} J_{2t} \Omega_2 \omega_y^* \sin\delta_{21} \\ (J_{2t} - J_2) \dot{\delta}_{21} \omega_y^* \sin\delta_{21} \cos\delta_{21} - J_{2t} \Omega_2 \omega_x^* \sin\delta_{21} \\ -(J_{2t} - J_2) \dot{\delta}_{21} \omega_z^* \sin\delta_{21} \cos\delta_{21} \end{bmatrix} +
$$

$$
\left. \begin{bmatrix} -(J_{3t} - J_3) \dot{\delta}_{32} \omega_x^* \sin\delta_{32} \cos\delta_{32} \\ J_{3t} \Omega_3 \omega_z^* \sin\delta_{32} \\ (J_{3t} - \Omega_3) \dot{\delta}_{32} \omega_z^* \sin\delta_{32} \cos\delta_{32} - J_{3t} \Omega_3 \omega_y^* \sin\delta_{32} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{15.45}
$$

可见,双陀螺力矩器的应用,大大简化了方程式中的交叉影响项。至于式(15.44) 和式(15.45) 中空间飞行器的运动项 $\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}^*$,可根据不同情况取自式(15.38) 或式(15.41) 右侧第一矩阵。

15.2 多动量轮三轴稳定空间飞行器的无控动力学特性

上节给出了多动量轮三轴稳定空间飞行器的姿态动力学方程式，现在我们来研究它在不受控制时的动力学特性。不失一般性地取反作用飞轮控制的空间飞行器为例。为了简单，设 $Oxyz$ 与飞行器主惯性轴重合，研究空间飞行器相对轨道坐标系的运动，因此，式(15.28)中$\boldsymbol{M} = \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_p = 0$时，有

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p) = 0 \tag{15.46}$$

在空间飞行器稳态运动($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s, \dot{\boldsymbol{\omega}}_s = 0$)时，有

$$\boldsymbol{\omega}_s \times (\mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_s + \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p) = 0 \tag{15.47}$$

只有在下述三种情况下，上式才能为零，即

$$\text{i)}\ \boldsymbol{\omega}_s = 0; \quad \text{ii)}\ \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_s + \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p = 0; \quad \text{iii)}\ \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_s + \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p = \lambda \boldsymbol{\omega}_s \tag{15.48}$$

其中，λ 是待定常数。

情况 i)是典型的三轴稳定工作状态。如设 $\boldsymbol{\omega}_s = 0$ 为稳态工作的理想角速度，则当出现了扰动 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 后，受扰的角速度为 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \delta\boldsymbol{\omega}$。把它代入式(15.46)，得

$$\mathbb{J} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} + \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p) = 0$$

如果 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 为小量，略去二阶量后，有

$$\mathbb{J} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega} \times \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{H}_p = 0 \tag{15.49}$$

这是线性微分方程式，可以通过研究单一反作用动量轮的作用，分析多个轮子的共同影响。假设只有沿 Oz 轴安装的动量轮，式(15.49)的分量形式成为

$$J_x \delta\dot{\omega}_x + H_3 \delta\omega_y = 0 \tag{15.50a}$$

$$J_y \delta\dot{\omega}_y - H_3 \delta\omega_x = 0 \tag{15.50b}$$

$$J_z \delta\dot{\omega}_z = 0 \tag{15.50c}$$

由式(15.50c)可得

$$\delta\omega_z = \delta\omega_z(0) = \text{const} \tag{15.51}$$

而式(15.50a)和式(15.50b)可改写为

$$\delta\ddot{\omega}_x + \omega_p^2 \delta\omega_x = 0 \tag{15.52a}$$

$$\delta\ddot{\omega}_y + \omega_p^2 \delta\omega_y = 0 \tag{15.52b}$$

$$\omega_p = \frac{H_3}{\sqrt{J_x J_y}} \tag{15.53}$$

以上述三式与式(13.5a)、式(13.5b)和式(13.4)相比，显见，本节中的空间飞行器在绕 Oz 轴以 $\delta\omega_z$ 自旋之外，还有附加在自旋运动之上的章动。章动角速度与动量轮角动量和飞行器惯量有关，仿照 13.1 节可求得

$$\delta\omega_x = -\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}\delta\omega_y(0)\sin\omega_p t + \delta\omega_x(0)\cos\omega_p t \tag{15.54a}$$

$$\delta\omega_y = \sqrt{\frac{J_x}{J_y}}\delta\omega_y(0)\sin\omega_p t + \delta\omega_x(0)\cos\omega_p t \tag{15.54b}$$

若取 $\delta\omega_t = \delta\omega_x + i\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}\delta\omega_y$，则由式(15.54)还可求得

$$\delta\omega_t = \delta\omega_t(0)e^{i\omega_p t} \tag{15.55}$$

其中

$$\delta\omega_t(0) = \left[\delta^2\omega_x(0) + \frac{J_y}{J_x}\delta^2\omega_y(0)\right]^{1/2} \tag{15.56}$$

因此本体锥顶角是

$$\tan\zeta = \frac{[\delta^2\omega_x(0) + J_y\delta^2\omega_y(0)/J_x]^{1/2}}{\delta\omega_z} \tag{15.57}$$

情况 ii）表示空间飞行器和动量轮的角动量之和为零。把 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \delta\boldsymbol{\omega}$ 代入式(15.46)，并考虑到 $\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_s + \sum_{p=1}^{P}\boldsymbol{H}_p = 0$ 和略去二阶小量，得

$$\mathbb{J}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbb{J}\cdot\delta\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{15.58}$$

如果令 $\boldsymbol{\omega}_s$ 的分量是 ω_{sx}、ω_{sy} 和 ω_{sz} 则上式成为

$$J_x\delta\dot{\omega}_x + \omega_{sy}J_z\delta\omega_z - \omega_{sz}J_y\delta\omega_y = 0 \tag{15.59a}$$

$$J_y\delta\dot{\omega}_y + \omega_{sz}J_x\delta\omega_x - \omega_{sx}J_z\delta\omega_z = 0 \tag{15.59b}$$

$$J_z\delta\dot{\omega}_z + \omega_{sx}J_y\delta\omega_y - \omega_{sy}J_x\delta\omega_x = 0 \tag{15.59c}$$

还可以写成

$$\underline{M}\dot{\underline{X}} + \underline{G}\,\underline{X} = 0 \tag{15.60}$$

其中

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix},\ \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{sz} & \omega_{sy} \\ \omega_{sz} & 0 & -\omega_{sx} \\ -\omega_{sy} & \omega_{sx} & 0 \end{bmatrix},\ \underline{X} = \begin{bmatrix} J_x\delta\omega_x \\ J_y\delta\omega_y \\ J_z\delta\omega_z \end{bmatrix}$$

所以，式(15.60)符合附录9中定理9.3的条件，而且有 $\det\underline{G} = 0$，因此式(15.59)表示的系统是不稳定的。事实上，如果取

$$\delta\omega_x = Ae^{\lambda t},\ \delta\omega_y = Be^{\lambda t},\ \delta\omega_z = Ce^{\lambda t}$$

代入式(15.59)后，可以求得

$$\lambda\begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -J_y\omega_{sz} & J_z\omega_{sy} \\ J_x\omega_{sz} & 0 & -J_z\omega_{sx} \\ -J_x\omega_{sy} & J_y\omega_{sx} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程式是

$$\lambda^3 + (\omega_{sx}^2 + \omega_{sy}^2 + \omega_{sz}^2)\lambda = 0$$

因此,特征值是

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \mathrm{i}(\omega_{sx}^2 + \omega_{sy}^2 + \omega_{sz}^2)^{1/2} \tag{15.61}$$

这表明 λ_1 对应姿态角速度的扰动量是恒值的速率,系统因而不稳。

对于情况 iii),如果只安装一台反作用动量轮,它的转子轴与 Ox,Oy 和 Oz 的夹角分别是 α_1,α_2 和 α_3,则式(15.48)第三式的分量形式是

$$J_x\omega_{sx} + H\cos\alpha_1 = \lambda\omega_{sx} \tag{15.62a}$$

$$J_y\omega_{sy} + H\cos\alpha_2 = \lambda\omega_{sy} \tag{15.62b}$$

$$J_z\omega_{sz} + H\cos\alpha_3 = \lambda\omega_{sz} \tag{15.62c}$$

而空间飞行器(不包含动量轮)的动能是 $2T_0 = J_x\omega_{sx}^2 + J_y\omega_{sy}^2 + J_z\omega_{sz}^2$,它与动量轮角动量平方 H^2 之比用 Q 表示,即

$$Q = \frac{2T_0}{H^2} = \frac{J_x\omega_{sx}^2 + J_y\omega_{sy}^2 + J_z\omega_{sz}^2}{H^2} \tag{15.63}$$

从式(15.62)求出 $\frac{\omega_{si}^2}{H^2}$,$i = x,y,z$,代入上式得

$$Q = \frac{J_x\cos^2\alpha_1}{(\lambda - J_x)^2} + \frac{J_y\cos^2\alpha_2}{(\lambda - J_y)^2} + \frac{J_z\cos^2\alpha_3}{(\lambda - J_z)^2} \tag{15.64}$$

假如已知运动的能量 T_0 和角动量 H,则可将由式(15.64)求得的 λ,再代回式(15.62)算出 ω_{sx}、ω_{sy} 和 ω_{sz},它们是第 iii)种情况的稳态运动平衡点。下面分析单一动量轮分别沿三个坐标轴方向安装的特殊情况。当 $\boldsymbol{H}$ 与 Ox 轴平行时,$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$,代入式(15.64),得

$$\lambda_{1,2} = J_x \pm (J_x/Q)^{1/2} \tag{15.65}$$

对于 $\boldsymbol{H}$ 与 Oy 和 Oz 平行的情况,同理可得

$$\lambda_{3,4} = J_y \pm (J_y/Q)^{1/2} \tag{15.66}$$

$$\lambda_{5,6} = J_z \pm (J_z/Q)^{1/2} \tag{15.67}$$

为研究 λ 等于上述六值时,运动的稳定性,再令 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \delta\boldsymbol{\omega}$,代回式(15.46),并注意到式(15.48)iii)和略去 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 的自乘项,得

$$\mathbb{J}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_s \times (\mathbb{J} - \lambda\mathbb{E})\cdot\delta\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{15.68}$$

它的分量形式是

$$\begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\dot{\omega}_x \\ \delta\dot{\omega}_y \\ \delta\dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(J_y - \lambda)\omega_{sz} & (J_z - \lambda)\omega_{sy} \\ (J_x - \lambda)\omega_{sz} & 0 & -(J_z - \lambda)\omega_{sx} \\ -(J_x - \lambda)\omega_{sy} & (J_y - \lambda)\omega_{sx} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

经拉氏变换后,成为

$$\begin{bmatrix} sJ_x & -(J_y - \lambda)\omega_{sz} & (J_z - \lambda)\omega_{sy} \\ (J_x - \lambda)\omega_{sz} & sJ_y & -(J_z - \lambda)\omega_{sx} \\ -(J_x - \lambda)\omega_{sy} & (J_y - \lambda)\omega_{sx} & sJ_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\omega_x(s) \\ \delta\omega_y(s) \\ \delta\omega_z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是得到特征方程式

$$J_xJ_yJ_zs^3+[(J_x-\lambda)(J_z-\lambda)\omega_{sy}^2+(J_x-\lambda)(J_y-\lambda)\omega_{sz}^2+(J_y-\lambda)(J_z-\lambda)\omega_{sx}^2]s=0 \tag{15.69}$$

它的三个根是

$$s_1=0 \tag{15.70}$$

$$s_{2,3}=\pm\left[-\frac{(J_x-\lambda)(J_y-\lambda)\omega_{sz}^2+(J_x-\lambda)(J_z-\lambda)\omega_{sy}^2+(J_y-\lambda)(J_z-\lambda)\omega_{sx}^2}{J_xJ_yJ_z}\right]^{1/2} \tag{15.71}$$

从式(15.62)中求解 ω_{sx}，ω_{sy} 和 ω_{sz}，代入上式，得

$$s_{2,3}=\pm\left[-\frac{(J_x-\lambda)(J_y-\lambda)H^2\cos^2\alpha_3}{(J_z-\lambda)^2J_xJ_yJ_z}-\frac{(J_x-\lambda)(J_z-\lambda)H^2\cos^2\alpha_2}{(J_y-\lambda)^2J_xJ_yJ_z}-\frac{(J_y-\lambda)(J_z-\lambda)H^2\cos^2\alpha_1}{(J_x-\lambda)^2J_xJ_yJ_z}\right]^{1/2} \tag{15.72}$$

对于动量轮沿 $Oxyz$ 坐标轴安装的情况，有

$$s_{2,3}=\pm\begin{cases}\left[-\dfrac{(J_y-\lambda)(J_z-\lambda)H^2}{(J_x-\lambda)^2J_xJ_yJ_z}\right]^{1/2}, & \text{当 } \boldsymbol{H} \text{ 与 } Ox \text{ 平行}\\ \left[-\dfrac{(J_x-\lambda)(J_z-\lambda)H^2}{(J_y-\lambda)^2J_xJ_yJ_z}\right]^{1/2}, & \text{当 } \boldsymbol{H} \text{ 与 } Oy \text{ 平行}\\ \left[-\dfrac{(J_y-\lambda)(J_x-\lambda)H^2}{(J_z-\lambda)^2J_xJ_yJ_z}\right]^{1/2}, & \text{当 } \boldsymbol{H} \text{ 与 } Oz \text{ 平行}\end{cases} \tag{15.73}$$

如果设 $J_x>J_y>J_z$，则对于 $\boldsymbol{H}$ 平行于 Ox 的情况，利用式(15.65)求得 λ_1 和 λ_2，如果 Q 足够大，应有 $\lambda_1>J_x>\lambda_2>J_y>J_z$ 的关系，因此由式(15.73)第一式应知 $s_{2,3}$ 为两个纯虚数根，表示系统是 Lyapunov 稳定的；对于 $\boldsymbol{H}$ 平行 Oz 的情况，通过相同的分析过程，得到同样的结果；对于 $\boldsymbol{H}$ 平行于 Oy 的情况，应用式(15.66)和式(15.73)第二式，能求得 $s_{2,3}$ 为正值，这表明系统是不稳定。这和简单刚体绕惯性主轴旋转的结论是类似的，在最大和最小惯性主轴方向安装反作用飞轮时，系统是稳定工作的，即等速度旋转的，转速为零是其中的一种特例。

不应忘记，还有另一特征根式(15.70)，它对应的是系统的等速旋转。

第十六章 挠性结构和带有液体的空间飞行器

现代的空间飞行器朝着两个方向发展，一是大型、多功能化；一是小型和微小型化。前一发展方向的结果使空间飞行器的结构变得越来越复杂，其尺寸逐渐变得庞大，结构挠性(弹性)日渐突出。由于挠性，使空间飞行器的动力学特性和分析方法出现了许多新的特点。挠性空间飞行器分为两大类：大型挠性结构和带有挠性附件的空间飞行器。前者如议论中的太阳能发电站，后者如经常遇到的带有太阳帆板、大型天线等挠性附件的卫星。由若干舱段和各舱段上携带的太阳帆板等挠性附件组成的大型空间站，则是这两类结构的混合型。本章将主要研究带有挠性附件的空间飞行器。

现代空间飞行器还要携带相当数量的液体，如轨道和姿态修正及控制用的燃料、载人飞船或空间站中的生活用水和生产试验等使用的液体，它们所占质量比例有时还会是很大的。对于这类空间飞行器，液体晃动会影响到姿态的精度或飞行器的工作质量。虽然，在空间飞行器上一般都存在着液体管理系统，让晃动尽可能减小，但有时还是要考虑它的影响。

考虑了空间飞行器的挠性变形、液体晃动等因素，使姿态动力学方程变得十分复杂，对它的详细研究将在专门的课程中进行，本章只给出最基本的概念和处理方法。

16.1 带有挠性附件的空间飞行器动力学方程式

图 16.1 是一颗通信卫星，由中心星体、太阳帆板和天线组成。通常认为中心星体是不

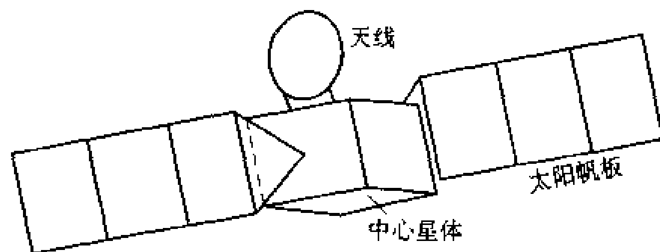


图 16.1 带有挠性附件的空间飞行器

变形的刚体，而太阳帆板和天线(附件)是可以弹性变形的挠性附件，它们组成以中心星体为核心，其上附着了若干挠性附件的一类构形，相当大数量的空间飞行器(图 16.2)属于这些构形。图中 B 是中心刚体，表示空间飞行器核心部分，$A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是挠性附件，N 为附件的总数。这种构形的结构，有时又称做**簇状拓扑结构**。还有另一种构形，它是若干刚体和可弹性变形挠性体以串并联形式连接于一体的，如图 16.3 所示。它们又被称为**树形拓扑结构**，因其形状类似树干、树枝和树叶故得名。假如只有串联的关系，而没有并联的分叉，又可称为**链状拓扑结构**。树形拓扑的最好例子是和平号空间站，而链状的例子如航天飞机及大型机械臂。还有一种结构，称为**环状拓扑**，它是当构成拓扑结构的刚体和

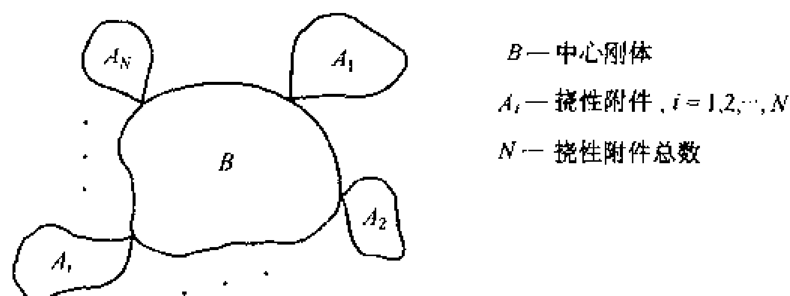


图 16.2　簇状拓扑结构的空间飞行器

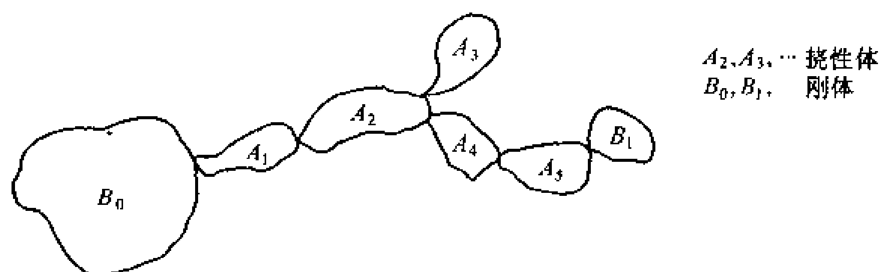


图 16.3　树形拓扑结构的空间飞行器

挠性体形成封闭的环形时的称谓，它所对应的是某些复杂的空间飞行器。由于簇状拓扑结构是最常遇到的空间飞行器的抽象化，同时它们又是其他类型拓扑结构的计算基础，本章仅对这种飞行器的动力学方程式的推导和它们的分析做一简要叙述。

16.1.1　矢量形式的姿态动力学方程式

图 16.4 是簇状拓扑结构的空间飞行器计算简图，B 是中心刚体，A_i 是第 i 个挠性附件，$i=1,2,\cdots,N$，N 为挠性附件总数。设 A_i 附件与中心刚体 B 在 P_i 点连接，O 是整个飞行器的质心。在 B 和 A_i 上各取微元质量 $\mathrm{d}m$，它们分别至 O 和 P_i 点的矢距是 $\boldsymbol{r}_b$ 和 $\boldsymbol{r}_{ai}$，$\boldsymbol{\delta}_i$ 是 A_i 有弹性变形时，$\mathrm{d}m$ 变至 $\mathrm{d}m'$ 的位移矢量，这是挠性飞行器特有的，P_i 至 O 点矢距是 $\boldsymbol{r}_{pi}$，$i=1,2,\cdots,N$。在 O 和 P_i 点各固定一组基矢 $\underline{\boldsymbol{e}}=[\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}_{ai}=[\boldsymbol{a}_{i2}\quad\boldsymbol{a}_{i2}\quad\boldsymbol{a}_{i3}]^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,N$，自 $\underline{\boldsymbol{e}}_{ai}$ 向 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 的变换矩阵为 $\underline{C}_{bai}$。和前几章一样，$\boldsymbol{\omega}$ 是空间飞行器相对轨道坐标系的角速度，一般讲，A_i 附件相对 B 应有 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 的角速度，但本章为了简单把 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 略去。

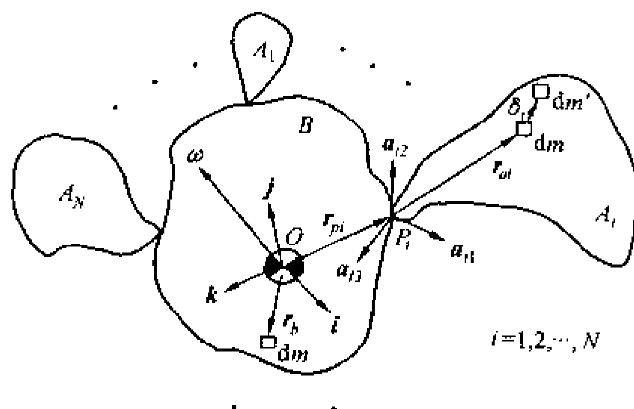


图 16.4　簇状结构空间飞行器计算简图

先求出 B 和 A_i 上 dm 质点的加速度。B 上 dm 的绝对速度是

$$\boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_b \tag{16.1}$$

其中,$\boldsymbol{v}_0$ 是质心 O 的运动速度。dm 的加速度是

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_b + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_b) \tag{16.2}$$

其中,$\boldsymbol{a}_0$ 是 O 的加速度。A_i 上 dm 质点的速度是

$$\boldsymbol{v}_{ai} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) + \mathring{\boldsymbol{\delta}}_i, i = 1,2,\cdots,N \tag{16.3}$$

式中,$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{r}_{pi} + \boldsymbol{r}_{ai}$,$\mathring{\boldsymbol{\delta}}_i$ 是变形量$\boldsymbol{\delta}_i$相对$\underline{\boldsymbol{e}}_{ai}$的变形速度。对上式求导还可获得 d$m$ 的加速度

$$\boldsymbol{a}_{ai} = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i)] + \mathring{\mathring{\boldsymbol{\delta}}}_i + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \mathring{\boldsymbol{\delta}}_i \tag{16.4}$$

为了简化推导,假设 $\boldsymbol{\omega}$,$\boldsymbol{\delta}_i$ 和它们的时间导数为小量,并略去它们的二阶以上项,则式(16.2) 和式(16.4) 成为

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_b \tag{16.5}$$

$$\boldsymbol{a}_{ai} = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_i + \mathring{\mathring{\boldsymbol{\delta}}}_i \tag{16.6}$$

空间飞行器姿态运动方程式,可写为

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{a}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N} \int_{Ai} (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \times \boldsymbol{a}_{ai} \mathrm{d}m = \boldsymbol{M} \tag{16.7}$$

其中,$\boldsymbol{M}$ 为飞行器所受外力矩之和。把式(16.2) 和式(16.4) 代入上式,并考虑到 O 点为质心,因而

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N} \int_{Ai} (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \mathrm{d}m = 0 \tag{16.8}$$

得矢量姿态运动方程式

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{N} \left[\int_{A_i} (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \times \mathring{\mathring{\boldsymbol{\delta}}} + 2\int_{A_i} (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathring{\boldsymbol{\delta}}_i) \mathrm{d}m \right] = \boldsymbol{M} \tag{16.9}$$

这里

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \int_B \boldsymbol{r}_b \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_b) \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i)] \mathrm{d}m \tag{16.10}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_B \boldsymbol{r}_b \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_b)] \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \{\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i)]\} \mathrm{d}m \tag{16.11}$$

对照式(附3.33) ~ 式(附3.38) 和式(附3.41)、式(附3.42),显见式(16.10) 和式(16.11) 中的$\mathbb{J}$是空间飞行器的转动惯量,且有

$$\mathbb{J} = \int_B (\boldsymbol{r}_b \cdot \boldsymbol{r}_b \mathbb{E} - \boldsymbol{r}_b \boldsymbol{r}_b) \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} [(\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \cdot (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) \mathbb{E} - (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i)(\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i)] \mathrm{d}m \tag{16.12}$$

由于 $\boldsymbol{\delta}_i$ 是时间和位置的函数,积分之后,$\mathbb{J}$ 将是与时间有关的变量,换言之$\mathbb{J}$ 将不是常值

量。然而$\mathbb{J}$中时间变化部分只是小量，常常可以忽略，这时$\mathbb{J}$成为

$$\mathbb{J} = \int_B (\boldsymbol{r}_b \cdot \boldsymbol{r}_b \mathbb{E} - \boldsymbol{r}_b \boldsymbol{r}_b)\mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i \mathbb{E} - \boldsymbol{\rho}_i \boldsymbol{\rho}_i)\mathrm{d}m \tag{16.13}$$

它已是常量了。

如果认为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i$ 是一阶小量，而略去它们的二阶以上量时，应该把式(16.5)和式(16.6)代入式(16.7)，求得姿态方程式的矢量描述式，也可以从式(16.9)中略去二阶以上小量，得到

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}\boldsymbol{\rho}_i \times \overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\delta}}_i \mathrm{d}m = \boldsymbol{M} \tag{16.14}$$

式中的$\mathbb{J}$是以式(16.13)表示的飞行器的转动惯量。

式(16.9)和式(16.14)是研究姿态运动的基本方程式，但在下面的分析中，还要用到轨道加速度，因此得先推导轨道运动方程。在 $Oxyz$ 坐标系中，它可以被写为

$$\int_B \boldsymbol{a}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}\boldsymbol{a}_{ai}\mathrm{d}m = \boldsymbol{F}$$

其中，$\boldsymbol{F}$ 是作用在空间飞行器上的外力之和。若把式(16.2)和式(16.4)中的 $\boldsymbol{a}_b$ 和 $\boldsymbol{a}_{ai}$ 代入上式，并考虑到式(16.8)质心关系式，得到

$$\boldsymbol{a}_0 m + \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{A_i}\overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}m + 2\boldsymbol{\omega} \times \int_{A_i}\overset{\circ}{\boldsymbol{\delta}}_i \mathrm{d}m\right) = \boldsymbol{F}$$

如果对式(16.8)求时间的导数，还可以求得$\sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}\overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{N}\int\overset{\circ}{\boldsymbol{\delta}}_i\mathrm{d}m = 0$，因此上式又将成为

$$\boldsymbol{a}_0 m = \boldsymbol{F} \tag{16.15}$$

其中，m 是整个空间飞行器的质量，而式(16.15)就是在轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$ 中的轨道运动方程式。显见，它与姿态运动是相互解耦的，这是选择了系统质心为参考点的缘故。

姿态运动方程式(16.9)或式(16.14))及轨道方程式(16.15)中，共有 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{a}_0$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i$ 三个待求变量，为了能使方程式有足够封闭求解的数量，还应再导出描述挠性附件弹性位移 $\boldsymbol{\delta}_i$ 的方程。后者通常是以偏微分方程的形式给出，它的推导和求解较繁，工程上往往要用有限元把问题离散化，并转到代数域求解。上面两种做法都因工作量大，难以容纳在短短的一小节之中，下面将把挠性附件视为均质等直悬臂梁，以简化推导。这样做，对了解处理挠性飞行器姿态运动全过程的步骤和实质不会产生影响。

图 16.5 是具有两个($N = 2$)相同且对称安装的挠性附件的空间飞行器，附件纵轴与 Oy 重合，弹性变形位移方向沿 Oz 轴。如果把附件沿轴向分割成 L 个等份，把每等份的质量分成两相等部分，分别放置在这一等份两端分割面的中心，便可将附件质量集中在其纵对称轴的 L 个等分点上，并把它们从根部编号为 $m_1, m_2, \cdots, m_l, \cdots, m_L$。这时附件将减化为只有刚度而无质量的直杆，其上附着 L 个集中质量。对于这种模型，任意质量 m_l 上承受的力 f_l，($l = 1,2,\cdots,L$) 应与附件上各质量的位移有关，在线性弹性变形范围内，有

$$f_l = \sum_{j=1}^{L} k_{lj}\boldsymbol{\delta}_j, l = 1,2,\cdots,L \tag{16.16}$$

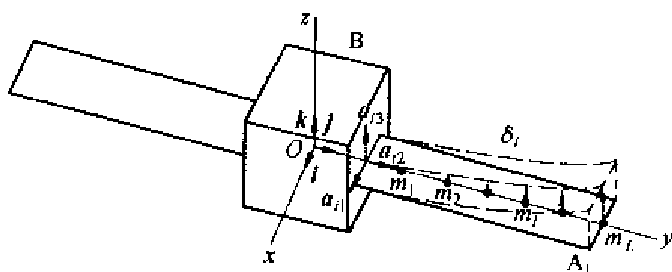


图 16.5　对称挠性附件空间飞行器

其中，k_{lj} 是 m_j 质量产生单位位移，其余质量无位移时，在 m_l 处应有的力，被称为力影响（刚度）系数，它们可根据结构参数求得。

f_l 力应包括惯性力 $-m_l\boldsymbol{a}_{al}$，阻尼力 $-c_l\mathring{\boldsymbol{\delta}}_l$ 和作用在 m_l 上的外力 $\boldsymbol{f}_l^e$。这里惯性力和阻尼力是"被动"力，因而冠以负号，而外作用力是"主动"的，所以用正号。用这些力表示 f_l 代入式(16.16)，得

$$m_l\boldsymbol{a}_{al} + c_l\mathring{\boldsymbol{\delta}}_l + \sum_{j=1}^{L}k_{lj}\boldsymbol{\delta}_j = \boldsymbol{f}_l^e, l = 1,2,\cdots,L \tag{16.17}$$

把式(16.15)代入式(16.6)消去 $\boldsymbol{a}_0$，再和式(16.17)一同消去 $\boldsymbol{a}_{al}$，将有

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_l m_l + m_l\mathring{\mathring{\boldsymbol{\delta}}}_l + c_l\mathring{\boldsymbol{\delta}}_l + \sum_{j=1}^{L}k_{lj}\boldsymbol{\delta}_j = \boldsymbol{f}_l^e - \frac{m_l}{m}\boldsymbol{F} \tag{16.18}$$

$$l = 1,2,\cdots,L$$

这就是以矢量形式表示的附件运动微分方程式，它已是线性常系数常微分方程。对于图 16.5 中的空间飞行器，因有两相同的挠性附件 A_1 和 A_2，所以共有 $2L$ 个形如式(16.18)的振动位移方程式。挠性附件经上述方法离散化处理之后，姿态运动方程式(16.9)(或式(16.14))中对 $\boldsymbol{\delta}_i$ 积分应改造成对 L 个集中质量经适当运算后的求和。因此式(16.18)和式(16.7)(或式(16.14))中的变量将都是 $\boldsymbol{\delta}_l$，$(l = 1,2,\cdots,L)$ 和 $\boldsymbol{\omega}$，总数为 $2L+1$ 个，与方程式数相同，因此，封闭可解。

16.1.2　分量形式的姿态动力学方程式

如果按图 16.5 所示，设置基矢 $\underline{e}$ 和 $\underline{e}_{ai}$，$i = 1,2$，显然会有

$$\underline{C}_{bai} = \underline{E}_{3\times3}, i = 1,2 \tag{16.19}$$

其中，$\underline{E}_{3\times3}$ 是 3×3 维单位阵。

姿态运动和附件振动方程式(16.14)和式(16.18)在 $Oxyz$ 中的分量形式应是

$$\underline{J}\,\underline{\dot{\omega}} + \sum_{i=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}\underline{\rho}_{il}^{\times}m_{il}\ddot{\underline{\delta}}_{il} = \underline{M} \tag{16.20}$$

$$\underline{\rho}_{il}^{\times T}m_{il}\,\underline{\dot{\omega}} + m_{il}\ddot{\underline{\delta}}_{il} + c_{il}\dot{\underline{\delta}}_{il} + \sum_{j=1}^{L}k_{lj}\underline{\delta}_{ij} = \underline{f}_{il}^{e} - \frac{m_{il}}{m}\underline{F}, i = 1,2, l = 1,2,\cdots,L \tag{16.21}$$

需说明的是，从式(16.14)变换到式(16.20)的过程中，积分式是经过如下处理的。

$$\int_{A_i}\boldsymbol{\rho}_i \times \mathring{\mathring{\boldsymbol{\delta}}}_i\mathrm{d}m = \underline{e}^{\mathrm{T}}\sum_{l=1}^{L}\underline{\rho}_{il}^{\times}m_{il}\ddot{\underline{\delta}}_{il}$$

这里把积分改成对 L 项乘积的求和，等式右侧的第二下标 l 表示第 L 项的序号，第一下标

i 表示该量属于 $A_i(i = 1,2)$ 附件。在从式(16.18)获得式(16.20)时，也把参变量改为具有相同意义的两下标量。

为进一步给出式(16.20)和式(16.21)展开的矩阵式，再假设 A_1 和 A_2 两附件的弹性位移是镜面对称的。因而有 $\boldsymbol{\delta}_{1l} = \boldsymbol{\delta}_{2l}$，所以只要写出 A_1 上 m 个质点的振动方程式，同时也就知道了 A_2 的振动情况。另外，为了简单，设 $L = 2$。再设

$$
\begin{gathered}
\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}, m_{11} = m_1, m_{12} = m_2, c_{11} = c_{12} = c \\
\underline{\delta}_{11} = [0 \quad 0 \quad \delta_1]^{\mathrm{T}}, \underline{\delta}_{12} = [0 \quad 0 \quad \delta_2]^{\mathrm{T}} \\
\underline{\rho}_{11} = [0 \quad \rho_1 \quad 0)^{\mathrm{T}}, \underline{\rho}_{12} = [0 \quad \rho_2 \quad 0]^{\mathrm{T}} \\
\underline{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^{\mathrm{T}}, \underline{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^{\mathrm{T}}, f_{11}^e = f_{12}^e = 0
\end{gathered}
\tag{16.22}
$$

设姿态角为小角度，还有

$$\omega_x = \dot{\varphi}, \omega_y = \dot{\vartheta}, \omega_z = \dot{\psi} \tag{16.23}$$

于是式(16.20)和式(16.21)可展开写为

$$\begin{bmatrix} J_x\ddot{\varphi} \\ J_y\ddot{\vartheta} \\ J_z\ddot{\psi} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \rho_1 m_1 \ddot{\delta}_1 + \rho_2 m_2 \ddot{\delta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{16.24}$$

$$\rho_1 m_1 \ddot{\varphi} + m_1 \ddot{\delta}_1 + c\dot{\delta}_1 + k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 = -\frac{m_1}{m}F_z \tag{16.25}$$

$$\rho_2 m_2 \ddot{\varphi} + m_2 \ddot{\delta}_2 + c\ddot{\delta}_2 + k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 = -\frac{m_2}{m}F_z \tag{16.26}$$

这里式(16.25)和式(16.26)分别是 $i = 1$ 和 2 时式(16.21)的展开结果，因曾假设附件的振动位移只为 z 方向，故只取了该方向的投影式。

上式诸方程式中，式(16.24)的第二式和第三式是独立的，其余三式相互耦合，应联立求解。它们还可改写为

$$J_x\ddot{\varphi} + \underline{H}\ddot{\underline{\delta}} = M_x \tag{16.27}$$

$$\underline{H}^{\mathrm{T}}\ddot{\varphi} + \underline{m_\delta}\ddot{\underline{\delta}} + \underline{c}\dot{\underline{\delta}} + \underline{K\delta} = -\underline{w}F_z \tag{16.28}$$

其中

$$
\begin{gathered}
\underline{H} = [2\rho_1 m_1 \quad 2\rho_2 m_2], \underline{m_\delta} = \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 \end{bmatrix}, \underline{c} = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \\
\underline{K} = \begin{bmatrix} 2k_{11} & 2k_{12} \\ 2k_{21} & 2k_{22} \end{bmatrix}, \underline{w} = \begin{bmatrix} 2m_1/m_0 \\ 2m_2/m_0 \end{bmatrix}, \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{16.29}
$$

应该指出的是，$\underline{m}_\delta$ 和 $\underline{K}$ 是对称的($\underline{m}_\delta = \underline{m}_\delta^{\mathrm{T}}, \underline{K} = \underline{K}^T$)，而且 $\underline{m}_\delta > 0$(因 $m_1, m_2 > 0$)。

通常对于簇状拓扑结构的空间飞行器，都可以获得如式(16.27)和式(16.28)的姿态运动方程式，式(16.27)描述空间飞行器的刚体运动，本例中只有绕 x 方向的转动，对于较复杂的情况，还要包括 y 和 z 方向的转动，对于更复杂的情况，还可能有挠性附件的旋转或

活动体(如宇航员或机器人)的运动。式(16.28)是挠性附件的振动运动方程式,本例中只有两个附件的各两维 z 向平移振动,如果用有限元技术处理,挠性附件的振动将用节点位移表示,其维数可达数十至数百,还可能包含另外两方向的平移振动和绕三轴的转动振动。对于含有液体的空间飞行器,将会出现晃动运动,它们也要包含在形如式(16.28)的方程式中。

16.1.3 方程的解 —— 非约束模态和正交条件

式(16.27)和式(16.28)是经过简化的带有挠性附件空间飞行器的姿态动力学方程式,但它们的形式与结构都和工程常用方法所得结果是一致的,因此通过对它们的求解,可以理解常规处理方法的原理和过程。

求解式(16.27)和式(16.28)方程组有多种方法,如级数逼近法、假设模态法、约束和非约束模态法等。比较常用的是约束和非约束模态法,下面通过非约束模态说明求解这两方程的一般过程。

所谓模态,是一个振动系统振型和频率的统称,而振型则是各点振动幅值所构成的图形。非约束模态则是这个系统的无阻尼自由振动下的振型和频率。根据这个定义,式(16.27)和式(16.28)振动系统的非约束模态方程式是

$$J_x\ddot{\varphi}_u + \underline{H}\,\ddot{\underline{\delta}}_u = 0 \tag{16.30}$$

$$\underline{H}^{\mathrm{T}}\ddot{\varphi}_u + \underline{m}_\delta\ddot{\underline{\delta}}_u + \underline{K}\,\underline{\delta}_u = 0 \tag{16.31}$$

下标 u 表示是非约束模态(unconstrained mode)。设上两式的解是

$$\varphi_u = \varphi_{ur}e^{\sqrt{-1}\Omega_r t},\ \underline{\delta}_u = \underline{\delta}_{ur}e^{\sqrt{-1}\Omega_r t} \tag{16.32}$$

Ω_r 和 $\underline{\delta}_{ur}$, φ_{ur} 分别是第 r 阶($r = 1,2,\cdots,L$)非约束模态的频率和附件线性振动及中心刚体角振动振幅(振型)。把式(16.32)代入式(16.30)和式(16.31),有

$$J_x\varphi_{ur} + \underline{H}\,\underline{\delta}_{ur} = 0 \tag{16.33}$$

$$\Omega_r^2(\underline{H}^{\mathrm{T}}\varphi_{ur} + \underline{m}_\delta\underline{\delta}_{ur}) = \underline{K}\,\underline{\delta}_{ur},\ r = 1,2,\cdots,L \tag{16.34}$$

由式(16.33)求出 φ_{ur} 代入式(16.34),得

$$(\Omega_r^2\underline{m}^* - \underline{K})\underline{\delta}_{ur} = 0,\ r = 1,2,\cdots,L \tag{16.35}$$

其中

$$\underline{m}^* = \underline{m}_\delta - \frac{1}{J_x}\underline{H}^{\mathrm{T}}\underline{H} \tag{16.36}$$

显然,$\underline{m}^*$ 仍然是对称的($\underline{m}^{*\mathrm{T}} = \underline{m}^*$),通常还是正定的($\underline{m}^* > 0$)。$\underline{\delta}_{ur}$ 不应恒为零,因此式(16.35)圆括弧中的矩阵行列式应为零,即

$$\det(\Omega_r^2\underline{m}^* - \underline{K}) = 0 \tag{16.37}$$

如果 $\underline{m}^*$ 和 $\underline{K}$ 是 R 维的方阵(本例 $R = 2$,两维振动运动 δ_1 和 δ_2),则上式将是最高幂次为$(\Omega_r^2)^R$ 的代数方程式,被称为系统的特征方程式,方程式的根是系统的特征值,即自由振动频率。对于物理可实现的系统,式(16.37)的根应是 R 对共轭虚数根,把这些根(特征值)代回式(16.35)能够求得对应的 $\underline{\delta}_{ur}$,这是系统的特征矢量或弹性振动幅值,又称为振型。而把求得的 $\underline{\delta}_{ur}$ 代入式(16.33),还可求出 φ_{ur},这是对应的诱导刚体振型。事实上,只有

共轭虚数特征值对应的振型和诱导振型才是求解姿态运动方程式所需要的，也是下面将要给出的。

对于本例，设非零特征值是 Ω_1 和 Ω_2，对应的特征矢量是 $\underline{\delta}_{u1}$ 和 $\underline{\delta}_{u2}$，它们满足正交条件，可推导如下。先取 $i = 1$ 的式(16.35)，再左乘 $\underline{\delta}_{u2}^{\mathrm{T}}$，得

$$\Omega_1^2\underline{\delta}_{u2}^{\mathrm{T}}\underline{m}^*\underline{\delta}_{u1} = \underline{\delta}_{u2}^{\mathrm{T}}\underline{K}\underline{\delta}_{u1}$$

再取 $i = 2$ 的式(16.35)，转置后右乘 $\underline{\delta}_{u1}$，考虑到 $\underline{m}^*$ 和 $\underline{k}$ 的对称性，有

$$\Omega_2^2\underline{\delta}_{u2}^{\mathrm{T}}\underline{m}^*\underline{\delta}_{u1} = \underline{\delta}_{u2}^{\mathrm{T}}\underline{K}\underline{\delta}_{u1} \tag{16.38}$$

上两式相减，得

$$(\underline{\Omega}_1^2 - \underline{\Omega}_2^2)\underline{\delta}_{u2}^{\mathrm{T}}\underline{m}^*\underline{\delta}_{u1} = 0$$

由此式得振型正交性的第一式

$$\underline{\delta}_{ur}^{\mathrm{T}}\underline{m}^*\underline{\delta}_{uq} = \begin{cases} 0, 当\ r \neq q\ 时, \\ g^2, 当\ r = q\ 时 \end{cases} \tag{16.39}$$

如果取 $\underline{\delta}_{ur}^* = \underline{\delta}_{ur}/g$ 和 $\underline{\delta}_{uq}^* = \underline{\delta}_{uq}/g$，代入上式并略去上标 $*$，得规一化的振型正交性，有

$$\underline{\delta}_{ur}^{\mathrm{T}}\underline{m}^*\underline{\delta}_{uq} = \begin{cases} 0, 当\ r \neq q\ 时, \\ 1, 当\ r = q\ 时 \end{cases} \tag{16.40}$$

如果设

$$\underline{D} = [\underline{\delta}_{u1}\underline{\delta}_{u2}] \tag{16.41}$$

和

$$\underline{\Omega} = \mathrm{diag}(\Omega_1 \quad \Omega_2) \tag{16.42}$$

（它们都是 R 维的方阵），振型的正交条件式(16.40)还可以写成

$$\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{m}^*\underline{D} = \underline{E} \tag{16.43}$$

$\underline{E}$ 是 R 维单位阵。把式(16.39)代回式(16.38)，得正交条件的第二式

$$\underline{\delta}_{uq}^{\mathrm{T}}\underline{K}\underline{\delta}_{ur} = \begin{cases} 0, 当\ r \neq q\ 时 \\ \Omega_i^2, 当\ r = q\ 时 \end{cases} \tag{16.44}$$

或

$$\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{K}\underline{D} = \underline{\Omega}^2 \tag{16.45}$$

如果把 $\underline{\delta}_{ur}$ 代入式(16.33)，还可求得

$$\varphi_{ur} = -\frac{1}{J_x}\underline{H}\underline{\delta}_{ur}, r = 1,2,\cdots,R \tag{16.46}$$

是刚体运动对第 r 阶振动的诱导振型，再令

$$\underline{\Phi} = [\varphi_{u1} \quad \varphi_{u2}\cdots\varphi_{uR}] \tag{16.47}$$

称 $\underline{\Phi}$ 为刚体振型（此处 $R = 2$）。式(16.33)还可以被写成

$$J_x\underline{\Phi} + \underline{H}\underline{D} = 0 \tag{16.48}$$

至此，便完成了非约束模态的求解。

然而，我们的最终目的是利用非约束模态振型和频率去求解姿态运动方程式(16.27)和式(16.28)，为此，构造由振型组成的级数

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_{u1}\eta_1(t) + \cdots + \underline{\delta}_{uR}\eta_R(t) = \underline{\delta}_{u1}\eta_1(t) + \underline{\delta}_{u2}\eta_2(t) = \underline{D}\,\underline{\eta}(t) \tag{16.49}$$

$$\varphi = B_0(t) + \varphi_{u1}\eta_1(t) + \cdots + \varphi_{uR}\eta_R(t) = B_0(t) + \varphi_{u1}\eta_1(t) + \varphi_{u2}\eta_2(t) = B_0(t) + \underline{\Phi}\,\underline{\eta}(t) \tag{16.50}$$

其中，$B_0(t)$ 和

$$\underline{\eta}(t) = [\eta_1(t)\cdots\eta_R(t)]^{\mathrm{T}} = [\eta_1(t)\eta_2(t)]^{\mathrm{T}} \tag{16.51}$$

是待定的时间函数，它们分别和刚体运动及弹性振动的维数一致。事实上，式(16.49) 和式(16.50) 两式也可以被看成是由 $\underline{\delta}$ 和 φ 到 $\underline{\eta}$ 和 B_0 的变量变换关系式。从物理意义讲，是把真实振动位移和姿态角分解为振动谐波的加权和。

把式(16.49) 和式(16.50) 代入式(16.27)，并注意到式(16.48)，可以求得

$$J_x \ddot{B}_0(t) = M_x \tag{16.52}$$

代入式(16.28) 后，用式(16.48) 消去 $\underline{\Phi}$，再利用式(16.36) 引入 $\underline{m}^*$，得

$$\underline{H}^{\mathrm{T}}\ddot{B}_0 + \underline{m}^*\underline{D}\,\ddot{\underline{\eta}} + \underline{C}\,\underline{D}\,\dot{\underline{\eta}} + \underline{K}\,\underline{D}\,\underline{\eta} = -\underline{W}F_z$$

左乘 $\underline{D}^{\mathrm{T}}$ 后，利用正交条件式(16.43) 和式(16.45) 化简，得

$$\ddot{\underline{\eta}} + \underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{C}\,\underline{D}\,\dot{\underline{\eta}} + \underline{\Omega}^2\underline{\eta} = -\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{W}\,\underline{F}_z - \underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{H}^{\mathrm{T}}\ddot{B}_0$$

再设 $\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{C}\,\underline{D}$ 为对角矩阵，以 $\underline{C}^*$ 表示，并以式(16.52) 消去 $\ddot{B}_0$，上式成为

$$\ddot{\underline{\eta}} + \underline{C}^*\dot{\underline{\eta}} + \underline{\Omega}^2\underline{\eta} = -\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{W}F_z - \underline{D}^{T}\underline{H}^{T}M_x/\underline{J}_x \tag{16.53}$$

对于本例，式(16.53) 可以写成

$$\ddot{\eta}_1 + C_1^*\dot{\eta}_1 + \Omega_1^2\eta_1 = -a_1F_z - b_1M_x/J_x$$

$$\ddot{\eta}_2 + C_2^*\dot{\eta}_2 + \Omega_2^2\eta_2 = -a_2F_z - b_2M_x/J_x$$

式中的 a_1, a_2 和 b_1, b_2 是 $\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{W}$ 和 $\underline{D}^{\mathrm{T}}\underline{H}^{\mathrm{T}}$ 的元素，都是已知量，因此可由这两式解得 η_1 和 η_2。在获得 B_0 和 η_1、η_2 后，由式(16.49) 和式(16.50) 算出 φ 和 δ_1、δ_2，问题就全面地解决了。

由式(16.52) 还可以看出，$B_0(t)$ 是有物理意义的，它是当空间飞行的挠性附件固化成刚体时，在外力矩 M_x 作用下产生的姿态解，而由式(16.50) 易知，$\underline{\Phi}\,\underline{\eta}$ 是因附件的弹性振动，叠加到 B_0 上的变动姿态角。

还有一种被称为约束模态的振型和频率，它是让空间飞行器的刚体运动固定为零(约束) 而求得的结果。利用它们也可以求解姿态运动方程式，限于篇幅，不再赘述。由于约束模态比非约束模态容易计算，且可以通过地面实验验证其正确性，因此常被用于工程实践之中；而非约束模态因未对空间飞行器进行约束，更接近于实际飞行情况，用较少阶数(三四阶或稍多一些) 就能足够精确地逼近真值。

还有一点需要说明，本节选择了质心 O 为建立动力学方程的参考点，它是瞬时质心，满足式(16.8) 的关系。由于该式包含了微元质量 $\mathrm{d}m$ 的弹性变形位移 $\boldsymbol{\delta}_i$，因此所得质心 O 点在 B 体上是变动的。如果设附件未变形时刻的质心为 O_0，则被称为视在质心，它在 B 上显然是固定不动的，并满足

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}\boldsymbol{\rho}_i \mathrm{d}m = 0 \tag{16.54}$$

的条件。式(16.8) 和式(16.54) 的差,就是 O 相对 O_0 距离 $\boldsymbol{e}$,又称为偏心,其值为

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}\boldsymbol{\delta}_i \mathrm{d}m \tag{16.55}$$

然而,瞬时质心 O 的运动才是由轨道运动方程式决定的真实轨道,视在质心 O_0 相对它以偏心量 $\boldsymbol{e}$ 进行摆动。一般情况下 $\boldsymbol{e}$ 是小量可以略去,需要精确计算时,可用式(16.55) 估计。

16.2　有晃动液体的空间飞行器

在微重力下晃动液体的处理很繁琐,本书不作分析。通常晃动计算的结果是获得若干等效的简单摆或弹簧质量块。本章只考虑等效摆的情况,这包括摆的悬挂点坐标,摆杆长度和摆的质量。每一摆的振动频率,形成的晃动力和晃动力矩都和对应阶液体晃动的相等,空间飞行器中液体晃动的特点是振动周期特别长,这是因为微重力造成的恢复力极小的缘故。

16.2.1　矢量形式的姿态动力学方程式

图 16.6 是带有晃动液体空间飞行器的简图,B 是表示飞行器主体的中心刚体,基矢量 $\underline{e} = [\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}$,$O$ 是整个空间飞行器的质心,P_i 第 i 摆的悬挂点,$i = 1,2,\cdots,Q$,Q 为摆的总数,O 到 P_i 的矢距以 $\boldsymbol{r}_i$ 表示,$\boldsymbol{l}_i$ 和 m_i 是摆杆长和摆的质量,$\boldsymbol{\Omega}_i$ 是摆相对 B 体的角速度,$\boldsymbol{\omega}$ 是姿态(B 相对轨道坐标系 $OX_oY_oZ_o$) 的角速度。

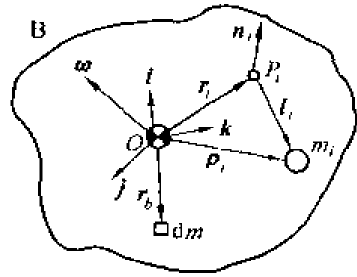


图 16.6　带有晃动液体的空间飞行器

在 B 上取微元质量 $\mathrm{d}m$,质心 O 至该微元的矢量为 $\boldsymbol{r}_b$,它的加速度仍以式(16.2) 或式(16.5)(略去二阶以上小量) 表示。摆端质量 m_i 的速度

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{l}_i,\ i = 1,2,\cdots,Q \tag{16.56}$$

其中,$\boldsymbol{v}_0$ 为质心 O 的速度,而

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{l}_i \tag{16.57}$$

m_i 的加速度

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{l}_i) + (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_i) \times \boldsymbol{l}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \times [(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_i) \times \boldsymbol{l}_i]$$

其中

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{l}_i) + \boldsymbol{\Omega}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_i) \times \boldsymbol{l}_i = 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{l}_i)$$

所以

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \boldsymbol{l}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \times (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{l}_i) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{l}_i),\ i = 1,2,\cdots,Q \tag{16.58}$$

如果认为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 都为小量,并略去它们的乘积,式(16.58) 将成为

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_i + \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \boldsymbol{l}_i \tag{16.59}$$

带有晃动液体空间飞行器的姿态运动方程式,可以用绕参考点 O 的力矩平衡条件给

出，即

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{a}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{Q} \boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{a}_i m_i = \boldsymbol{M} \tag{16.60}$$

把式(16.5) 和式(16.59) 代入上式，考虑到质心 O 的关系式

$$\int_B \boldsymbol{r}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{Q} \boldsymbol{\rho}_i m_i = 0 \tag{16.61}$$

得矢量形式的姿态运动方程式

$$\mathbb{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{i=1}^{Q} \boldsymbol{\rho}_i \times (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \boldsymbol{l}_i) m_i = \boldsymbol{M} \tag{16.62}$$

其中，$\mathbb{J}$ 是空间飞行器瞬时转动惯量

$$\mathbb{J} = \int_B (\boldsymbol{r}_b \cdot \boldsymbol{r}_b \mathbb{E} - \boldsymbol{r}_b \boldsymbol{r}_b) \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{Q} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i \mathbb{E} - \boldsymbol{\rho}_i \boldsymbol{\rho}_i) m_i \tag{16.63}$$

假设晃动是小量，略去它的影响，上式可以简化成

$$\mathbb{J} = \int_B (\boldsymbol{r}_b \cdot \boldsymbol{r}_b \mathbb{E} - \boldsymbol{r}_b \boldsymbol{r}_b) \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{Q} (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i \mathbb{E} - \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_i) m_i \tag{16.64}$$

便成了常值的转动惯量。

摆的运动方程式，将从摆与中心刚体的分离体相对悬挂点 P_i 的力矩平衡求得。由于悬挂点相当于铰链，其力矩为零，因此有

$$\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{a}_i m_i = 0, i = 1,2,\cdots,Q$$

把式(16.59) 代入后，得

$$\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{a}_0 m_i + \boldsymbol{l}_i \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{p}_i) m_i + \boldsymbol{l}_i \times (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \boldsymbol{l}_i) m_i = 0 \tag{16.65}$$

式中，质心 O 的加速度 $\boldsymbol{a}_0$，可从平移(轨道) 运动方程中求出。而平移运动满足

$$\int_B \boldsymbol{a}_b \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{Q} \boldsymbol{a}_i m_i = \boldsymbol{F}$$

其中，$\boldsymbol{F}$ 是空间飞行器所受外力之和。把式(16.5) 和式(16.59) 代入后，考虑到式(16.61)，得轨道运动方程式

$$\boldsymbol{a}_0 m + \sum_{i=1}^{Q} \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \boldsymbol{l}_i m_i = \boldsymbol{F} \tag{16.66}$$

m 是空间飞行器的总质量。从式(16.66) 中求得 $\boldsymbol{a}_0$，代入式(16.65)，得晃动摆运动的矢量表达式

$$\boldsymbol{l}_i \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_i) m_i + \boldsymbol{l}_i \times (\mathring{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \boldsymbol{l}_i) m_i - \frac{m_i}{m} \boldsymbol{l}_i \times \sum_{j=1}^{Q} \mathring{\boldsymbol{\Omega}}_j \times \boldsymbol{l}_j m_j = -\frac{m_i}{m} \boldsymbol{l}_i \times \mathbf{F}, i = 1,2,\cdots,Q \tag{16.67}$$

至此，已完成了空间飞行器姿态运动方程式(16.62) 和晃动摆方程式(16.67) 的推导，共有 $1 + Q$ 个方程，而待求量也是这么多，即 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_i, i = 1,2,\cdots,Q$，刚好够封闭求解。

16.2.2　分量形式的动力学方程式和解

如果让式(16.62) 和式(16.67) 中的矢量在 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 基矢确定的坐标系中分解，这两式的分量形式是

$$\underline{J}\dot{\underline{\omega}} + \sum_{i=1}^{Q} \underline{\rho}_i^{\times} \underline{l}_i^{\times T} m_i \dot{\underline{\Omega}}_i = \underline{M} \tag{16.68}$$

$$\underline{l}_i^{\times} \underline{\rho}_i^{\times T} m_i \dot{\underline{\omega}} + \underline{l}_i^{\times} \underline{l}_i^{\times T} m_i \dot{\underline{\Omega}}_i - \frac{m_i}{m} \underline{l}_i^{\times} \sum_{j=1}^{Q} \underline{l}_j^{\times T} m_j \dot{\underline{\Omega}}_j = -\frac{m_j}{m} \underline{l}_i^{\times} \underline{F} \tag{16.69}$$

为了有清晰的概念,考察一特例:$\boldsymbol{e}$ 基矢与空间飞行器主惯性轴重合,因而有

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}$$

作用力 $\boldsymbol{F}$ 只有 $\boldsymbol{k}$ 方向的分量,即

$$\underline{F} = [0 \quad 0 \quad F_z]^{\mathrm{T}}$$

在此力作用下,贮箱中的液体燃料沉向 $\boldsymbol{k}$ 的负方向,因此无扰动时,等效摆应指向 $-\boldsymbol{k}$ 方向。假如只保留影响最大的一阶晃动,取一个摆,摆杆长是 l_1。在扰动下 $\boldsymbol{l}_1$ 绕 $\boldsymbol{j}$ 转动一小角度 α,因此 $\boldsymbol{l}_1$ 的分量近似表达式是

$$\underline{l}_1 = [-l_1\alpha \quad 0 \quad -l_1]^{\mathrm{T}}$$

而摆的转动角速度是

$$\underline{\Omega}_1 = [0 \quad \dot{\alpha} \quad 0]$$

再设 $\boldsymbol{r}_1 = 0$(则 $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{l}_1$) 和 $\underline{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$,式(16.68) 和式(16.69) 将成为

$$\begin{bmatrix} J_x\dot{\omega}_x \\ J_y\dot{\omega}_y \\ J_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1^2(1+\alpha^2)m_1\ddot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{16.70}$$

$$\begin{bmatrix} l_1^2\dot{\omega}_x - l_1^2\alpha\dot{\omega}_z \\ l_1^2(1+\alpha^2)\dot{\omega}_y \\ -l_1^2\alpha\dot{\omega}_x + l_1^2\alpha^2\dot{\omega}_z \end{bmatrix} m_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1^2(1+\alpha^2)m_1(1-\frac{m_1}{m})\ddot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1}{m} l_1 F_z \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16.71}$$

仅式(16.70)和式(16.71)第二式和晃动有关,可见在 F_z 的作用下,当初始状态有绕 $\boldsymbol{j}$ 的转角时,就会引起该方向的晃动,并造成姿态角速度 ω_y 的变化。在 y 方向的姿态和晃动运动影响下,还会出现 ω_x 和 ω_z 扰动量。从式(16.70)第二式求出 $\dot{\omega}_y$,代入式(16.71)第二式,略去 α^2 后,还可求得纯晃动运动

$$\ddot{\alpha} + \frac{F_z}{l_1 m(1 - \frac{m_1}{m} - \frac{l_1^2 m_1}{J_y})}\alpha = -\frac{M_y}{J_y(1 - \frac{m_1}{m} - \frac{l_1^2 m_1}{J_y})} \tag{16.72}$$

易知晃动的频率是

$$\omega_s = \left[\frac{F_z}{l_1 m(1 - \frac{m_1}{m} - \frac{l_1^2 m_1}{J_y})}\right]^{1/2} \tag{16.73}$$

显见,晃动频率 ω_s 与施加的控制力 F_z 成正比,而与空间飞行器的质量成反比。由于 F_z 通常很小,晃动的频率 ω_s 将是很小的,大约为 0.01 ~ 0.1 s^{-1},或更低。解式(16.72),得

$$\alpha(t) = \alpha(0)\cos\omega_s t + \frac{\dot{\alpha}(0)}{\omega_s}\sin\omega_s t - \frac{ml_1}{F_z J_y}M_y \tag{16.74}$$

其中,$\alpha(0)$ 和 $\dot{\alpha}(0)$ 是初始摆动角和角速度。把 α 代入式(16.70)第二式,还可求得晃动引起的 $\omega_y(t)$,即

$$\omega_y(t) = \frac{l_1^2 m_1}{J_y}[\omega_s\alpha(0)\sin\omega_s t - \dot{\alpha}(0)\cos\omega_s t] + \omega_y(0) + \frac{1}{J_y}\int_0^t M_y dt \tag{16.75}$$

这里 $\omega_y(0)$ 是 y 方向姿态角速度的初值。可见晃动对 ω_y 的影响,与晃动摆的转动惯量 $l_1^2 m_1$ 和 J_y 之比成正比关系。无防晃措施时,一阶晃动质量能占总质量的一半左右,这是值得注意的。

还应指出,对于在轨道运动的飞行器,当重力为零或接近于零时,液体处于悬浮状态,当然不存在所谓的晃动和它对空间飞行器的影响,只有在有控制力的情况下才会出现晃动。

附　　录

附录 1　大气密度

科学联合会国际委员会(International Council of Scientific union) 建立了一种 CIRA 大气模型,它考虑了温度和高度对大气密度的影响,写成

$$\rho = \rho(T, h)$$

影响温度的因素有很多,如季节、昼夜、地磁和太阳活动程度,一天内的平均温度主要与太阳活动有关。描述太阳活动程度的指标是 10.7 cm 波长的电磁波强度 $F_{10.7}$,它随太阳活动周期(11 年) 和太阳自旋(27 天) 变化,具有这两种周期分量(图附 1.1)。按照不同的 $F_{10.7}$ 数值,可将大气划分为十种类型(见表附 1.1),不同类型大气的密度随高度的变化规律见图附 1.2。

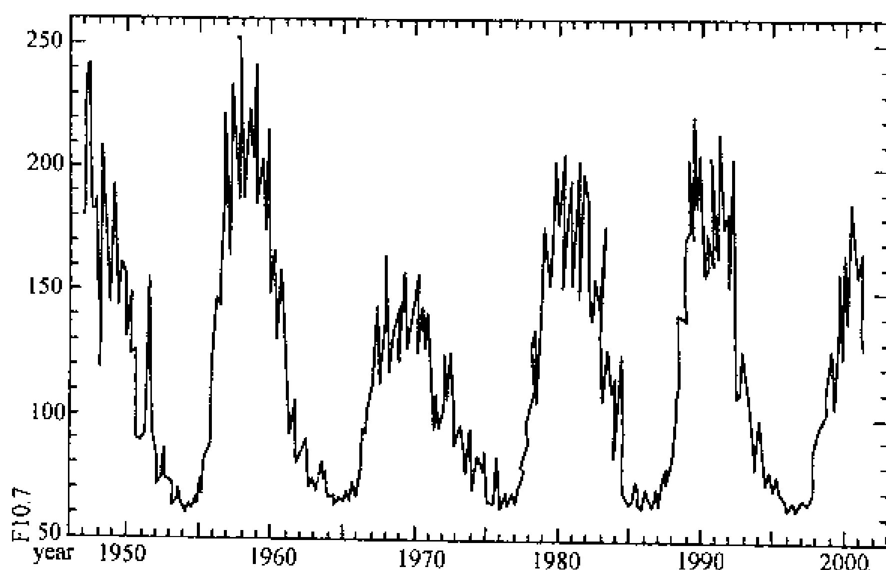
表附 1.1

$F_{10.7}/10^{-22}(Wm^{-2}H_z^{-1})$	65	75	100	125	150	175	200	225	250	275
大气类型 NO.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

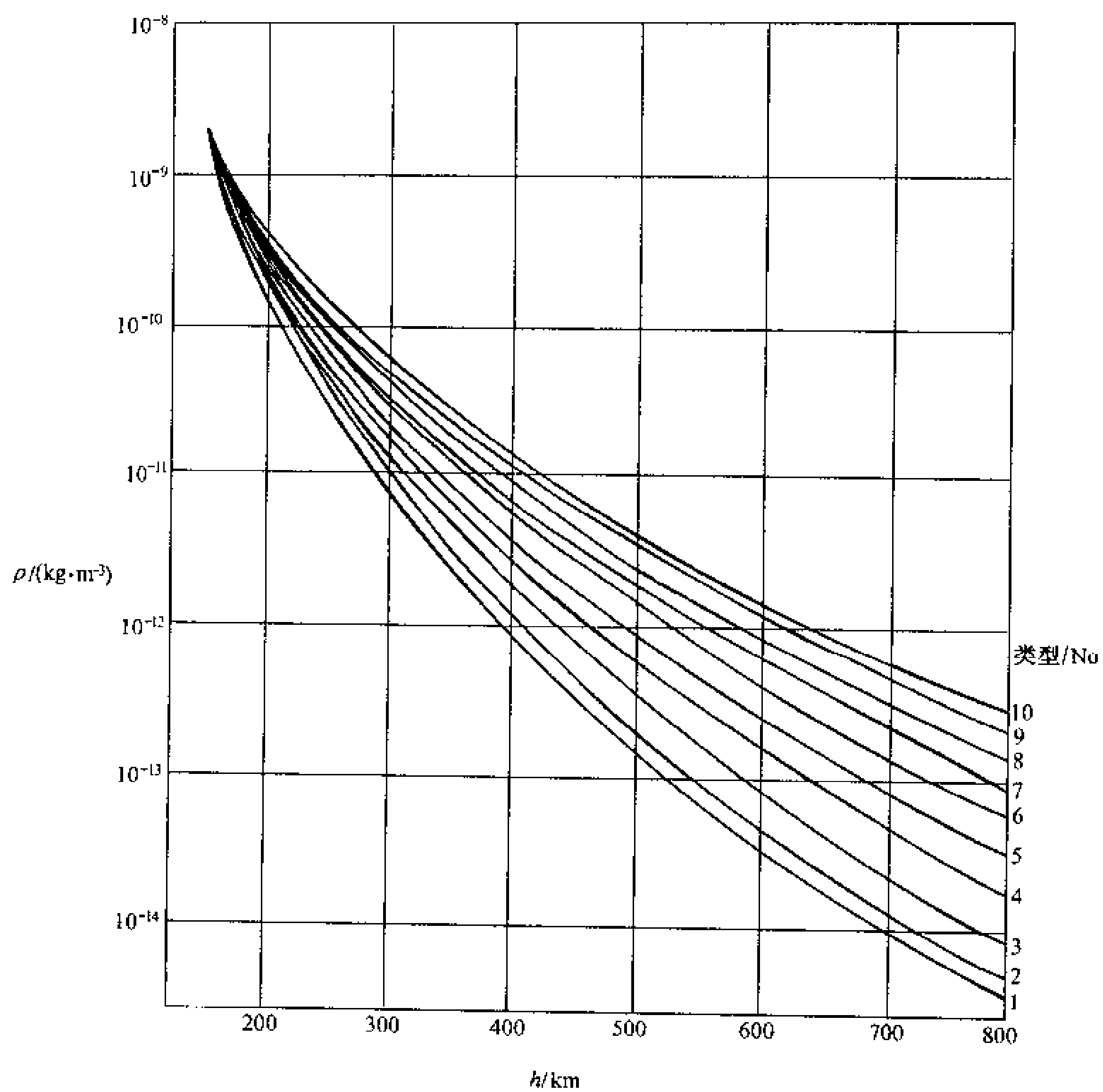
考虑到太阳活动影响后,大气密度随高度变化的规律可取为

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}} \tag{附 1.1}$$

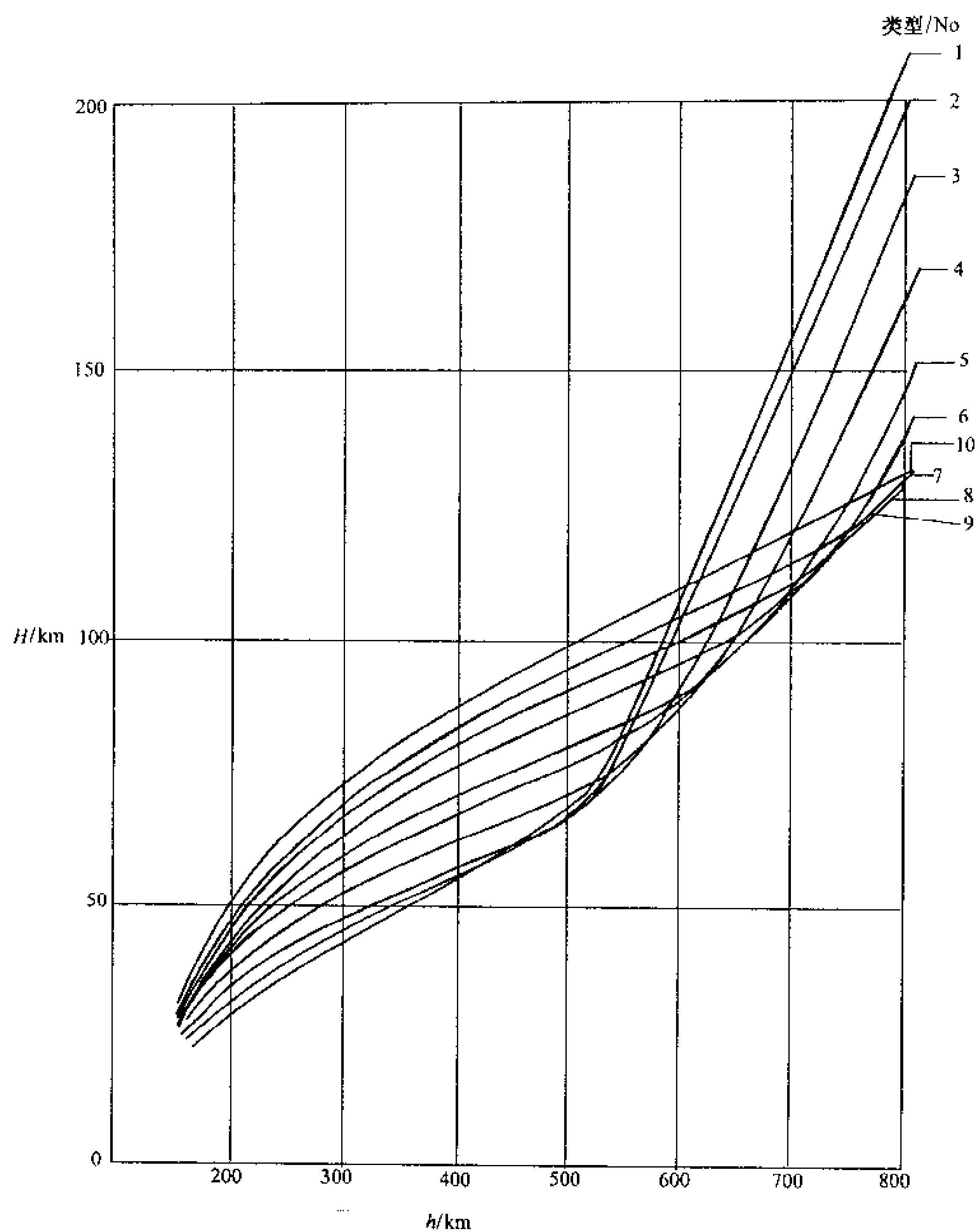
其中,ρ 和 ρ_0 分别是高度为 h 和 h_0 处的大气密度,H 为标高。标高 H 与大气类型及距理论地球表面高度有关,见图附 1.3。



图附 1.1　太阳活动系数随年份的变化



图附 1.2　不同类型大气白天平均密度与高度的关系

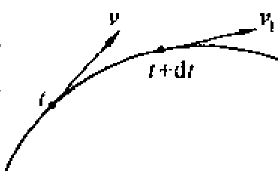


图附 1.3 不同类型大气标高 H 与高度 h 的关系

附录 2　齐奥尔科夫斯基公式

火箭在空间飞行时，从发动机喷管不断以高速向外喷射出高温燃气，后者的反作用产生了使火箭向前飞行的推力。在火箭上的作用力还有空气动力、重力(在低空飞行)和太阳光压力、其他星体的引力(在高空飞行)等。研究火箭的飞行，应考虑上述全部作用力的影响，然而这里先略去其他作用力，只研究发动机推力的作用，它是上述诸力之中影响最大的。

设火箭飞行时，在 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的速度分别是 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$(见图附 2.1)，火箭在 t 时刻的动量是 $m\boldsymbol{v}$，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的动量分为两部分：火箭因喷射出 $\mathrm{d}m$ 质量(燃料)后，速度增高为 $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$，所含动量 $(m-\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})$；质量为 $\mathrm{d}m$ 的喷气流以 $\boldsymbol{w}$ 相对速度(其绝对速度是 $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$) 喷出火箭的动量 $(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})\mathrm{d}m$。根据动量守恒原理，$t$ 和 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的动量应相等，即 $m\boldsymbol{v}=(m-\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})\mathrm{d}m$。略去二阶小量后，得



图附 2.1　动量的改变

$$m\mathrm{d}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\mathrm{d}m=0 \qquad (附 2.1)$$

如果认为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 共线，只考虑它们的绝对值，若初始时刻火箭速度为 v_0，质量是 m_0，则上式积分后得

$$v(t)=v_0+w\ln\frac{m_0}{m} \qquad (附 2.2)$$

这就是**齐奥尔科夫斯基公式**，亦称为理想火箭运动方程式。上式还可以写成速度增量形式

$$\Delta v(t)=v(t)-v_0=w\ln\frac{m_0}{m} \qquad (附 2.3)$$

假如火箭中的燃料全部耗尽时的质量是 m_k，则该瞬时火箭速度增量达到最大

$$\Delta v_k=w\ln\frac{m_0}{m_k} \qquad (附 2.4)$$

由此可见，燃气从发动机喷管喷出的速度 w 越大，火箭原始质量和最终质量之比 m_0/m_k(燃料所占比例) 越大，则火箭的最大速度增量越大。

分析式(附 2.4) 可以得出以下两个结论：(1) 按现代技术一般水平：$m_0/m_k=10$，$w=3\,500$ m/s，若 $v_0=0$，得 $v_k=8$ km/s，似乎用一级火箭可以获得人造地球卫星所需的第一宇宙速度(7.9 km/s)，实际上若考虑到重力和空气阻力的影响，v_k 值远低于上述计算量，这就是现代运载火箭多数为多级的原因；(2) 如将 w 增加 α 倍，则新的火箭末速 v_k^* 将增加同一倍数。若将 m_0/m_k 增大 α 倍，将有 $v_k^*=w\ln m_0/m_k+w\ln\alpha$，即末速增加了 $v_k^*/v_k=1+\ln\alpha/\ln(m_0/m_k)$ 倍。显然，靠提高 w 来取得更大的末速效果要好得多，这就是为什么人们总是首先设法提高 w 而不是 m_0/m_k 比值的缘故。应用现代最新技术，提高 w，同时尽可能提高 m_0/m_k，已有可能开发出单级入轨的运载火箭和空间飞行器。

如果定义 $\Delta m=m_0-m_k$ 是火箭在初始和最终时刻的质量差，则式(附 2.4) 还可以写成

$$\Delta m=m_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta v_k}{w}}\right) \qquad (附 2.5)$$

此式将被用于轨道和姿态修正时燃料耗量的估计。

附录 3 矢量和矢量的分量

矢量的描述

任意矢量 $\boldsymbol{B}$ 可用三个分量 B_1、B_2 和 B_3 及对应的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合写为

$$\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3 \quad (附3.1)$$

其中的三个单位矢量又总称为**基矢或基**,并用

$$\underline{\boldsymbol{e}} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}} \quad (附3.2)$$

表示。式中,$\underline{(\cdot)}$ 下面的一横表示$(\cdot)$量是矩阵(任意维),其元素可以是矢量也可以是标量,这里 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 是 3×1 的列阵,其元素都是矢量($\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$)。互相正交的基矢有如下特性

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \begin{cases} 1, 当\ \alpha = \beta, & \alpha,\beta = 1,2,3 \\ 0, 当\ \alpha \neq \beta, & \alpha,\beta = 1,2,3 \end{cases}$$

于是

$$\underline{\boldsymbol{e}} \cdot \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} = \underline{E}_3 \quad (附3.3)$$

这里 $\underline{E}_3$ 是 3×3 的单位阵。

当使用不止一个基矢,描述不同的空间物理量时,可用上标加以区别,如 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$ 等。某一基矢的分量可以表述为另一基矢分量的线性组合,如

$$\boldsymbol{e}_\alpha^{(s)} = \sum_{\beta=1}^{3} C_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\beta^{(r)}, \alpha = 1,2,3$$

表示为矩阵式时,成为

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)} = \underline{C}_{sr}\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)} \quad (附3.4)$$

$\underline{C}_{sr}$ 是由(r)基矢向(s)基矢变换的矩阵(3×3 维),其元素由相应单位矢量之间的夹角余弦组成,即 $C_{\alpha\beta}$ 是$\boldsymbol{e}_\alpha^{(s)}$ 和$\boldsymbol{e}_\beta^{(r)}$ 的夹角余弦 $\cos(\widehat{\boldsymbol{e}_\alpha^{(s)},\boldsymbol{e}_\beta^{(r)}})$。该变换矩阵具有 $\underline{C}_{sr} = (\underline{C}_{rs})^{-1} = \underline{C}_{rs}^{\mathrm{T}}$ 的特性,是正交矩阵。因此,从式(附 3.4) 可以求得

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)} = \underline{C}_{rs}\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)} = \underline{C}_{sr}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)} \quad (附3.5)$$

此外,坐标变换矩阵的行列式为 1,即

$$\det\underline{C}_{sr} = 1 \quad (附3.6)$$

和同一行(或列)的三个元素平方和为 1;不同行(或列)的相同列元素相乘后再相加结果为零,是坐标变换矩阵的固有特性。

如果把 $\boldsymbol{B}$ 的分量写成 $\underline{B} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3]^{\mathrm{T}}$,则式(附 3.1) 还能写成

$$\boldsymbol{B} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{B}\ 或\ \boldsymbol{B} = \underline{B}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{e}} \quad (附3.7)$$

这是把矢量与分量联系起来的方程。

假如 $\boldsymbol{B}$ 矢量分别在$\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$ 基矢中取分量,必有

$$\boldsymbol{B} = \underline{\boldsymbol{e}}^{(s)\mathrm{T}}\underline{B}^{(s)} = \underline{\boldsymbol{e}}^{(r)\mathrm{T}}\underline{B}^{(r)}$$

利用式(附 3.5) 消去 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$,得

$$\underline{B}^{(s)} = \underline{C}_{sr}\underline{B}^{(r)} \qquad (附 3.8)$$

可见，坐标系之间的变换矩阵就是基矢间的变换矩阵。

矢量的点积或标积(Dot product or scalar product)

若两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在某基矢中的分量是 $\underline{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^{\mathrm{T}}$ 和 $\underline{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^{\mathrm{T}}$，则据式(附 3.7)可写成

$$\boldsymbol{a} = \underline{a}^{T}\underline{\boldsymbol{e}} \text{ 和 } \boldsymbol{b} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{b}$$

点乘积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 是 $\underline{a}^{T}\underline{\boldsymbol{e}} \cdot \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{b}$，考虑到式(附 3.3)有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \underline{a}^{\mathrm{T}}\underline{b} \qquad (附 3.9)$$

由于矢量点乘满足交换律，还有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{a}$$

若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$ 中分解，而 $\boldsymbol{b}$ 在 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}$ 中分解，式(附 3.9)成为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \underline{a}^{(r)\mathrm{T}}\underline{C}_{rs}\underline{b}^{(s)} = \underline{b}^{(s)\mathrm{T}}\underline{C}_{sr}\underline{a}^{(r)} \qquad (附 3.10)$$

矢量的叉乘或矢量积(Cross product or vector product)

由定义同基矢的两矢量叉乘，得

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

如以分量形式表示，可写成

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{a}^{\times}\underline{b} \qquad (附 3.11)$$

其中

$$\underline{a}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (附 3.12)$$

式(附 3.11)的正确性，可直接展开右侧证明。由于 $\underline{a}^{\times}$ 是反对称的，即有 $\underline{a}^{\times\mathrm{T}} = -\underline{a}^{\times}$，并考虑到 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$，而知

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{a}^{\times\mathrm{T}}\underline{b} \qquad (附 3.13)$$

显然，还有

$$\underline{a}^{\times}\underline{a} = 0 \qquad (附 3.14)$$

$\boldsymbol{a}$ 在不同基矢 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$ 中的分量 $\underline{a}^{(s)}$ 和 $\underline{a}^{(r)}$ 满足

$$\underline{a}^{(s)\times} = (\underline{C}_{sr}\underline{a}^{(r)})^{\times} = \underline{C}_{sr}\underline{a}^{(r)\times}\underline{C}_{rs} \qquad (附 3.15)$$

此式也可通过将左右侧展开而证明。

矢量的不定乘积和张量(Indeterminate product and tensor)

两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的不定乘积，是它们的并列排序，两者的模可以相乘，表示方向的单位矢量位置不能颠倒。

张量 $\mathbb{D}$ 是个算子，由一系列双矢的不定积之和构成，如

$$\mathbb{D} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots \qquad (附 3.16)$$

它又被称为**并矢**(Dyadic)，其中的矢量顺序不允许变动，但可以和相邻的矢量按规定的规

则进行运算,如

$$\mathbb{D}\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots)\cdot\boldsymbol{v}=$$
$$\boldsymbol{a}_1b_1v\cos(\boldsymbol{b}_1\hat{,}\boldsymbol{v})+\boldsymbol{a}_2b_2v\cos(\boldsymbol{b}_2\hat{,}\boldsymbol{v})+\cdots$$

已经是一个普通矢量之和。同理

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbb{D}=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots)=$$
$$va_1\cos(\boldsymbol{v}\hat{,}\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_2+va_2\cos(\boldsymbol{v}\hat{,}\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_2+\cdots$$

是 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots$ 线性和。然而

$$\boldsymbol{v}\times\mathbb{D}\text{ 或 }\mathbb{D}\times\boldsymbol{v}$$

却仍然是张量(并矢)。

颠倒张量$\mathbb{D}$ 中两矢量的次序,得到新张量$\mathbb{D}^*$,称$\mathbb{D}$ 的共轭张量(共轭并矢),如

$$\mathbb{D}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots$$
$$\mathbb{D}^*=\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2+\cdots$$

张量符合分配律

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)\cdot\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}$$

在 $\underline{e}$ 基矢中的两矢量$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$和$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$构成的张量是

$$\mathbb{D}=\boldsymbol{ab}=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}a_\alpha b_\beta\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}D_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta \tag{附 3.17}$$

显然,上式中$\mathbb{D}_{\alpha\beta}=a_\alpha b_\beta(\alpha,\beta=1,2,3)$ 称为$\mathbb{D}$ 在$\underline{e}$ 中的坐标或分量,排成矩阵是

$$\mathbb{D}=\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{13}\\D_{21}&D_{22}&D_{23}\\D_{31}&D_{32}&D_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}=\underline{a}\,\underline{b}^{\mathrm{T}} \tag{附 3.18}$$

于是式(附 3.17) 就可以改写成

$$\mathbb{D}=\underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{D}\,\underline{e} \tag{附 3.19}$$

这就是张量或并矢的分量表达式,称 $\underline{D}$ 为张量矩阵。

如果$\mathbb{D}$ 中有若干个矢量对(如式(附 3.16)),则

$$\mathbb{D}=\underline{e}^{\mathrm{T}}(\underline{a}_1\underline{b}_1^{\mathrm{T}}+\underline{a}_2\,\underline{b}_2^{\mathrm{T}}+\cdots)\underline{e}=\underline{e}^{\mathrm{T}}\underline{D}\,\underline{e}$$

其中

$$\underline{D}=\underline{a}_1\underline{b}_1^{\mathrm{T}}+\underline{a}_2\,\underline{b}_2^{\mathrm{T}}+\cdots \tag{附 3.20}$$

由式(附 3.18) 还可求得

$$\underline{D}^*=\underline{D}^{\mathrm{T}} \tag{附 3.21}$$

即相互共轭的张量,其张量矩阵是相互转置的。

由式(附 3.17)、式(附 3.1) 和式(附 3.3) 可以求得

$$\mathbb{D}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}D_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta^{T}\cdot\boldsymbol{e}_\beta B_\beta=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}D_{\alpha\beta}B_\beta\boldsymbol{e}_\alpha$$

而由式(附 3.19) 和式(附 3.7) 还可写成

$$\mathbb{D}\cdot\boldsymbol{B}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{D}\,\underline{e}\cdot\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{B}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{D}\,\underline{B}\qquad(附3.22)$$

以基矢的三个分量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 构成的张量

$$\mathbb{E}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

是单位张量。把 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 看成普通矢量，可以写成 $\boldsymbol{e}_i=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{e}_i=\underline{e}_i^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{e}}(i=1,2,3)$，而

$$\underline{e}_1=[1\quad0\quad0]^{\mathrm{T}},\underline{e}_2=[0\quad1\quad0]^{\mathrm{T}},\underline{e}_3=[0\quad0\quad1]^{\mathrm{T}}$$

代入$\mathbb{E}$ 的表达式，考虑到式(附 3.19) 和式(附 3.20)，便有

$$\mathbb{E}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\underline{e}_1\underline{e}_1^{\mathrm{T}}+\underline{e}_2\underline{e}_2^{\mathrm{T}}+\underline{e}_3\underline{e}_3^{\mathrm{T}})\underline{\boldsymbol{e}}=$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{e}}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{E}\,\underline{\boldsymbol{e}}\qquad(附3.23)$$

即

$$\mathbb{E}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{e}}\qquad(附3.24)$$

对于任意矢量 $\boldsymbol{a}$，$\mathbb{E}$ 具有

$$\mathbb{E}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\mathbb{E}=\boldsymbol{a}\qquad(附3.25)$$

的特点。

把张量$\mathbb{D}$ 写成在 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$ 中的分量形式，再利用式(附 3.19)，可写成 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)\mathrm{T}}\underline{D}^{(s)}\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}=\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)\mathrm{T}}\underline{D}^{(r)}\underline{\boldsymbol{e}}^{(r)}$，应用式(附 3.5) 的关系便可求得 $\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)\mathrm{T}}\underline{D}^{(s)}\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}=\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)\mathrm{T}}\underline{C}_{sr}\underline{D}^{(r)}\underline{C}_{rs}\underline{\boldsymbol{e}}^{(s)}$。于是有

$$\underline{D}^{(s)}=\underline{C}_{sr}\underline{D}^{(r)}\underline{C}_{rs}\qquad(附3.26)$$

这是不同基矢间张量矩阵的变换关系。

矢量混合积与张量

作为熟悉上述内容的练习，取 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 三个矢量，求混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 的分量形式。应用矢量分析的关系有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab})\cdot\boldsymbol{c}$$

如把 $\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab}$ 视为张量，它的张量矩阵是

$$\underline{b}\,\underline{a}^{\mathrm{T}}-\underline{a}\,\underline{b}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&b_1a_2-b_2a_1&b_1a_3-b_3a_1\\-(b_1a_2-b_2a_1)&0&b_2a_3-b_3a_2\\-(b_1a_3-b_3a_1)&-(b_2a_3-b_3a_2)&0\end{bmatrix}$$

再利用式(附 3.19) 写成

$$\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\underline{ba}^{\mathrm{T}}-\underline{ab}^{\mathrm{T}})\underline{\boldsymbol{e}}$$

考虑到 $\boldsymbol{c}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{c}$ 和式(附 3.3) 后，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\underline{ba}^{\mathrm{T}}-\underline{ab}^{\mathrm{T}})\underline{c}\qquad(附3.27a)$$

而根据式(附 3.11) 还可以直接求得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\underline{a}^{\times}\underline{b})^{\times}\underline{c}\qquad(附3.27b)$$

比较上两式，显见应有

$$(\underline{a}^{\times}\underline{b})^{\times}=\underline{ba}^{\mathrm{T}}-\underline{ab}^{\mathrm{T}}\qquad(附3.28)$$

对于另一种顺序的矢量积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ca}\cdot\boldsymbol{b}$$

对右侧第一项的 $\boldsymbol{b}$ 应用式(附 3.25)后,上式可改造为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\mathbb{E}-\boldsymbol{c}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \tag{附 3.29}$$

再用式(附 3.19)、式(附 3.9) 和式(附 3.23),可求得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{a}\,\underline{E}-\underline{c}\,\underline{a}^{\mathrm{T}})\underline{b} \tag{附 3.30}$$

而利用式(3.11),还可直接写出

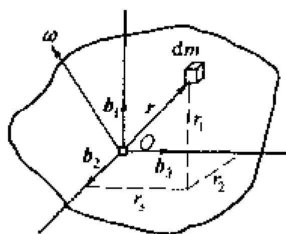
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{a}^{\times}\,\underline{c}^{\times\mathrm{T}}\underline{b} \tag{附 3.31}$$

比较上式,显然有

$$\underline{a}^{\times}\,\underline{c}^{\times\mathrm{T}}=\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{a}\,\underline{E}-\underline{c}\,\underline{a}^{\mathrm{T}} \tag{附 3.32}$$

在刚体的旋转中,常得到下面三个矢量积分,作为例子在这里研究一下。图附 3.1 中在刚体 B 的 O 点固定一组正交基矢 $\underline{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}=[b_1\quad b_2\quad b_3]^{\mathrm{T}}$,刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转,与 O 点距离为 $\boldsymbol{r}$ 处的质量微元 $\mathrm{d}m$ 常构成如下的积分(积分遍及整个 B 体)

$$\int_B \boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m$$



图附 3.1　旋转刚体

利用式(附 3.29),我们可求得

$$\int_B \boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m=\int_B(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\mathbb{E}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{附 3.33}$$

其中的积分式利用式(附 3.9) 和式(附 3.18),并再据式(附 3.32) 可改写成

$$\int_B(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\mathbb{E}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\mathrm{d}m=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\int_B(\underline{r}^{\mathrm{T}}\underline{r}\,\underline{E}-\underline{r}\,\underline{r}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}m\underline{\boldsymbol{e}}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\int_B\underline{r}^{\times}\,\underline{r}^{\times\mathrm{T}}\mathrm{d}m\underline{\boldsymbol{e}} \tag{附 3.34}$$

如果把 $\underline{r}=[r_1\ r_2\ r_3]^{\mathrm{T}}$ 代入上式,得

$$\int_B(\underline{r}^{\mathrm{T}}\underline{r}\,\underline{E}-\underline{r}\,\underline{r}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}m=\int_B\begin{bmatrix}r_2^2+r_3^2 & -r_1r_2 & -r_1r_3\\ -r_2r_1 & r_1^2+r_3^2 & -r_2r_3\\ -r_3r_1 & -r_2r_3 & r_1^2+r_2^2\end{bmatrix}\mathrm{d}m=$$

$$\begin{bmatrix}J_1 & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_2 & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_3\end{bmatrix}=\underline{J}=\int_B\underline{r}^{\times}\,\underline{r}^{\times\mathrm{T}}\mathrm{d}m \tag{附 3.35}$$

显然,$\underline{J}$ 是 B 体在 $\boldsymbol{b}$ 基矢坐标系中的转动惯量,又称转动惯量矩阵。因此式(附 3.33) 成为

$$\int_B\boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m=\mathbb{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{附 3.36}$$

其中

$$\mathbb{J}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{J}\underline{\boldsymbol{e}}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}J_1 & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_2 & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_3\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{e}} \tag{附 3.37}$$

是转动惯量张量(并矢),它的分量是

$$J_1 = \int_B (r_2^2 + r_3^2)\mathrm{d}m,\ J_2 = \int_B (r_3^2 + r_1^2)\mathrm{d}m$$
$$J_3 = \int_B (r_1^2 + r_2^2)\mathrm{d}m,\ J_{12} = \int_B r_1 r_2 \mathrm{d}m \tag{附 3.38}$$
$$J_{13} = \int_B r_1 r_3 \mathrm{d}m,\ J_{23} = \int_B r_2 r_3 \mathrm{d}m$$

再来分析刚体转动中的第二个积分式

$$\frac{1}{2}\int_B (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m$$

只要利用矢量分析的关系,将被积函数改写成

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]$$

代回原式,再用式(附 3.36) 式,就可写出

$$\frac{1}{2}\int_B (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{附 3.39}$$

这是转动运动的动能。它的分量形式是

$$\frac{1}{2}\int_B (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\underline{\omega}^{\mathrm{T}}\, \underline{J}\, \underline{\omega} \tag{附 3.40}$$

常见的第三个积分是$\int_B \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]\mathrm{d}m$。首先利用矢量分析的规律把被积函数变换为

$$\boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})] = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]$$

于是

$$\int_B \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]\mathrm{d}m = \boldsymbol{\omega} \times [\int_B \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m]$$

考虑到式(附 3.36),便有

$$\int_B \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]\mathrm{d}m = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

而最终结果的叉乘和点乘的顺序无关,因此

$$\int_B \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]\mathrm{d}m = \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{附 3.41}$$

它的分量形式是

$$\int_B \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]\mathrm{d}m = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\omega}^{\times}\, \underline{\mathbf{J}}\, \underline{\omega} \tag{附 3.42}$$

只要把分量表达式代入,还可以证明对于任意并矢$\mathbb{D}$ 和矢量$\boldsymbol{a}$,有

$$(\mathbb{D} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} = 0, \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \mathbb{D}) = 0 \tag{附 3.43}$$
$$(\boldsymbol{a} \times \mathbb{D}) \cdot \boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{a} \times (\mathbb{D} \cdot \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \times \mathbb{D}) \cdot \boldsymbol{a} \tag{附 3.44}$$

附录 4　转动惯量的特性

不同基矢间转动惯量的关系

式(附 3.35)是刚体 B 在某一固联在其上基矢坐标系中的转动惯量表达式。假如在 B 体的同一点固联两套基矢 $\underline{e}^{(s)}$ 和 $\underline{e}^{(r)}$，$\underline{r}$ 在它们中的分量分别是 $\underline{r}^{(s)} = [r_1^{(s)}\ r_2^{(s)}\ r_3^{(s)}]^{\mathrm{T}}$，$\underline{r}^{(r)} = [r_1^{(r)}\ r_2^{(r)}\ r_3^{(r)}]^{\mathrm{T}}$，它们中的转动惯量分量是

$$\underline{J}^{(s)} = \begin{bmatrix} J_1^{(s)} & -J_{12}^{(s)} & -J_{13}^{(s)} \\ -J_{12}^{(s)} & J_2^{(s)} & -J_{23}^{(s)} \\ -J_{13}^{(s)} & -J_{23}^{(s)} & J_3^{(s)} \end{bmatrix},\ \underline{J}^{(r)} = \begin{bmatrix} J_1^{(r)} & -J_{12}^{(r)} & -J_{13}^{(r)} \\ -J_{12}^{(r)} & J_2^{(r)} & -J_{23}^{(r)} \\ -J_{13}^{(r)} & -J_{23}^{(r)} & J_3^{(r)} \end{bmatrix} \quad (附 4.1)$$

根据式(附 3.26)，$\underline{J}^{(s)}$ 和 $\underline{J}^{(r)}$ 之间的关系是

$$\underline{J}^{(s)} = \underline{C}_{sr}\underline{J}^{(r)}\underline{C}_{rs} \quad (附 4.2)$$

主轴和主惯性矩

当基矢取不同方向，转动惯量的各个分量不同。基矢取某一方向时，转动惯量矩阵的非对角线元素变为零，此时的基矢三个方向称为主轴方向，基矢即是主轴，对应的转动惯量对角线元素就是主惯性矩。

假如 $\underline{J}^{(r)}$ 是主惯性矩矩阵，而对应的非主惯性矩的转动惯量是 $\underline{J}^{(s)}$，根据式(附 4.2)便可写出

$$\underline{C}_{sr}\begin{bmatrix} J_1^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & J_2^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{(r)} \end{bmatrix} = \underline{J}^{(s)}\underline{C}_{sr}$$

若以 $\underline{C}_{sr}^{\alpha}(\alpha = 1,2,3)$ 表示 $\underline{C}_{sr}$ 的第 α 列，由上式可得 $J_\alpha^{(r)}\underline{C}_{sr}^{\alpha} = \underline{J}^{(s)}\underline{C}_{sr}^{\alpha}(\alpha = 1,2,3)$，所以

$$\underline{J}^{(s)} - J_\alpha^{(r)}\underline{E})\underline{C}_{sr}^{\alpha} = \underline{0},\ \alpha = 1,2,3 \quad (附 4.3)$$

这是典型的 3×3 维特征值问题，$J_\alpha^{(r)}$ 是式(附 4.3)的特征值，它的特征矢量是 $\underline{C}_{sr}^{\alpha}$。由于 $\underline{J}^{(s)}$ 是实对称矩阵，所以式(附 4.3)的特征值和特征矢量也是实的，且特征矢量是正交的[27]。

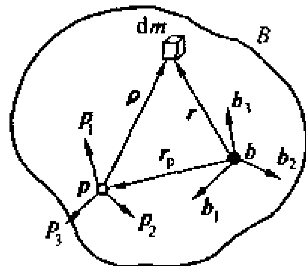
当 $J_\alpha^{(r)}(\alpha = 1,2,3)$ 互异时，对于某一 α，由式(附 4.3)能求出两相互独立的方程式，再加上方向余弦应满足的特性 $\sum_{\beta=1}^{3}(C_{sr}^{\alpha\beta})^2 = 1$，便可以算出 $\underline{C}_{sr}^{\alpha}$ 中的三个元素 $(C_{sr}^{\alpha\beta})(\beta = 1,2,3)$，取不同的 α 值，可求出全部方向余弦，即 $\underline{C}_{sr}$ 矩阵。当 $J_1^{(r)} = J_2^{(r)} \neq J_3^{(r)}$ 时，用上述方法能求出 $J_3^{(r)}$ 主轴方向的 $\underline{C}_{sr}^{3}$，而对于 $J_1^{(r)}$(或 $J_2^{(r)}$)系数矩阵 $(\underline{J}^{(s)} - J_1^{(r)}\underline{E})$ 只有一行是独立的，它表明与 $J_3^{(r)}$ 主轴 $(e_3^{(r)})$ 垂直的平面中，任何两相互正交的轴都是主轴。对于 $J_1^{(r)} = J_2^{(r)} = J_3^{(r)}$ 的情况，连 $\underline{J}^{(s)}$ 也是对角阵了，这表明，通过 O 点的任何三正交轴都是主轴。

相对不同点的转动惯量间的关系

图附4.1所示是刚体 B，假如基矢的方向不变 $\boldsymbol{b}_1 /\!/ \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{b}_2 /\!/ \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{b}_3 /\!/ \boldsymbol{p}_3$，当基矢的原点分别在 b 和 p 处时，p 相对 b 的矢距是 $\boldsymbol{r}_p$，且有 $\underline{r}_p = [r_{p1} \quad r_{p2} \quad r_{p3}]^{\mathrm{T}}$，若 B 上一微元体 $\mathrm{d}m$ 距 b 和 p 的矢距是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$，则刚体 B 在 $\boldsymbol{b}$ 中的转动惯量矩阵 $\underline{J}^{(b)}$ 和在 $\boldsymbol{p}$ 中的 $\underline{J}^{(p)}$ 关系，可推导如下。据式(附3.35)有

$$\underline{J}^{(p)} = \int_B (\underline{\rho}^{\mathrm{T}} \underline{\rho}\, \underline{E} - \underline{\rho}\, \underline{\rho}^{\mathrm{T}}) \mathrm{d}m$$

$$\underline{J}^{(b)} = \int_B (\underline{r}^{\mathrm{T}} \underline{r}\, \underline{E} - \underline{r}\, \underline{r}^{\mathrm{T}}) \mathrm{d}m$$



图附4.1　刚体对不同点的转动惯量

考虑到 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{\rho}$，由上两式可以导得

$$\underline{J}^{(b)} = \underline{J}^{(p)} + (\underline{r}_p^{\mathrm{T}} \underline{r}_p \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_p^{\mathrm{T}}) m + 2\underline{r}_p^{\mathrm{T}} \int_B \underline{\rho} \mathrm{d}m \underline{E} - \underline{r}_p \int_B \underline{\rho}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}m - \int_{\mathrm{B}} \underline{\rho} \mathrm{d}m \underline{r}_p^{\mathrm{T}} \tag{附4.4}$$

其中，m 是刚体 B 的质量，一阶质量矩可改写为

$$\int_B \underline{\rho} \mathrm{d}m = \underline{r}_c m \tag{附4.5}$$

式中的 $\underline{r}_c$ 是质心 C 相对 p 的矢量分量。式(附4.4)成为

$$\underline{J}^{(b)} = \underline{J}^{(p)} + (\underline{r}_p^{\mathrm{T}} \underline{r}_p \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_p^{\mathrm{T}}) m + (2\underline{r}_p^{\mathrm{T}} \underline{r}_c \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_c^{\mathrm{T}}) m \tag{附4.6}$$

假如 p 点是质心，将有 $\int_B \boldsymbol{\rho} \mathrm{d}m = 0$，式(附4.6)成为

$$\underline{J}^{(b)} = \underline{J}^{(p)} + (\underline{r}_p^{\mathrm{T}} \underline{r}_p \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_p^{\mathrm{T}}) m \tag{附4.7}$$

附录 5　矢量和张量对时间的导数

矢量对时间的导数

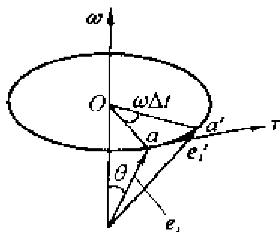
矢量的时间导数，是矢量幅值和方向随时间的变化率。假如把矢量分解成分量

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{附 5.1}$$

而 $\underline{\boldsymbol{e}} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}}$ 是相对惯性空间以 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的，则有

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 + a_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} + a_2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} + a_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3}{\mathrm{d}t}$$

其中右侧前三项表示，每一分量对时间的导数，再按基矢方向取几何和，它表示 $\boldsymbol{a}$ 矢量相对 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 基矢坐标系的时间变化率，可写为 $\mathring{\boldsymbol{a}}$，以便和 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 相区别。右侧最后三项都是单位基矢对时间的导数，可参考图附 5.1 求导。$\boldsymbol{e}_i(i = 1,2,3)$ 是单位基矢，$\boldsymbol{\omega}$ 是基矢绕其转动的角速度。在 $t = t_0$ 时刻，$\boldsymbol{e}_i$ 的矢端位于 a 点，经过 Δt 时间后，$\boldsymbol{e}_i$ 转至 $\boldsymbol{e}'_i$，其矢端画出一绕 $\boldsymbol{\omega}$ 的圆弧达到 a' 点。如果 O 是 aa' 圆弧的圆心，则 $\angle aoa' = \omega\Delta t$。若 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的夹角为 θ，则由图附 5.1 知，$aa' = \omega\Delta t\,|\boldsymbol{e}_i|\sin\theta$。当 Δt 趋近于零时，$\widehat{aa'}$ 弧段逼近 aa' 弦长，其方向趋近于圆在 a 点的切线 $\boldsymbol{\tau}$。换言之，当 $\Delta t \to 0$ 时 $\widehat{aa'} \approx \underline{aa'} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i\Delta t$。根据导数的定义，有



图附 5.1　基矢的转动

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\widehat{\boldsymbol{aa'}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i\Delta t}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i,\ i = 1,2,3$$

把这些关系式代回上面导数式，得

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \mathring{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\omega}\times(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) = \mathring{\boldsymbol{a}}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a} \tag{附 5.2}$$

在推导式(附 5.2)时曾假定 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 是相对惯性空间转动的，因此式(附 5.2)中 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 相对惯性空间的时间导数，而 $\mathring{\boldsymbol{a}}$ 是对基矢 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 空间的(相对)时间导数，两者之间的差恰是 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha}$。

其实我们并不要求式(附 5.2)的左侧一定是相对惯性空间的，所以式(附 5.2)还可以一般地叙述为：矢量 $\boldsymbol{a}$ 相对 $\underline{\boldsymbol{s}}$ 基矢空间的时间导数 $\dot{\boldsymbol{a}}^{(s)}$，等于 $\boldsymbol{a}$ 相对 $\underline{\boldsymbol{r}}$ 基矢空间的导数 $\mathring{\boldsymbol{a}}^{(r)}$，再加上 $\underline{\boldsymbol{r}}$ 空间相对 $\underline{\boldsymbol{s}}$ 空间的旋转角速度 ${}^s\boldsymbol{\omega}^r$ 叉乘 $\boldsymbol{a}$，即

$$\dot{\boldsymbol{a}}^{(s)} = \mathring{\boldsymbol{a}}^{(r)} + {}^s\boldsymbol{\omega}^r\times\boldsymbol{a} \tag{附 5.3}$$

这个等式应用很广，应牢记，特别是其中 ${}^s\boldsymbol{\omega}^r$ 的相对关系。

张量对时间的导数

根据上述对矢量求时间导数的原理，还可求得张量对时间的导数。例如

$$\mathbb{D} = \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{D}}\,\underline{\boldsymbol{e}} \tag{附 5.4}$$

它的时间导数是

$$\dot{\mathbb{D}} = \underline{\dot{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}\underline{\dot{\boldsymbol{D}}}\,\underline{\boldsymbol{e}} + \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\dot{\boldsymbol{D}}}\,\underline{\boldsymbol{e}} + \underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}}} \tag{附 5.5}$$

由于 $\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i$，所以

$$\underline{\dot{\boldsymbol{e}}} = \boldsymbol{\omega}\times\underline{\boldsymbol{e}} \text{ 和 } \underline{\dot{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega}\times\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \tag{附 5.6}$$

把它们代入式(附 5.5)并考虑到式(附 5.4),有

$$\overset{\circ}{\mathbb{D}} = \dot{\mathbb{D}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{D} - \mathbb{D} \times \boldsymbol{\omega} \qquad (附\ 5.7)$$

上式右侧第一项是 $\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\underline{\dot{\boldsymbol{D}}}\,\underline{\boldsymbol{e}}$ 的简写,它表示$\mathbb{D}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 系统中分量的时间变化率,其余两项是基矢的时间导数项演化的结果。

假如有若干个基矢定义了数个坐标系,基矢 $\underline{\boldsymbol{e}}_b$ 相对 $\underline{\boldsymbol{e}}_a$ 以角速度${}^a\boldsymbol{\omega}^b$ 旋转,而并矢$\mathbb{D}$ 在 $\boldsymbol{e}_b$ 基矢坐标系中的分量是$\mathbb{D} = \underline{\boldsymbol{e}}_b^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{D}}^{(b)}\underline{\boldsymbol{e}}_b$,那么式(附 5.7)还可以理解为并矢相对 $\underline{\boldsymbol{e}}_a$ 空间的导数$\dot{\mathbb{D}}$ 是该量在 $\underline{\boldsymbol{e}}_b$ 中的时间变化率$\overset{\circ}{\mathbb{D}}$ 与另外两项之和,并写成

$$\dot{\mathbb{D}} = \overset{\circ}{\mathbb{D}} + {}^a\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbb{D} - \mathbb{D} \times {}^a\boldsymbol{\omega}^b \qquad (附\ 5.8)$$

事实上式(附 5.8)右侧分别表示$\mathbb{D}$ 在$\underline{\boldsymbol{e}}_b$ 中数量变化的速率(第一项)和因 $\underline{\boldsymbol{e}}_b$ 相对$\underline{\boldsymbol{e}}_a$ 的方向变动而引起的$\mathbb{D}$ 的变化速率(第二和三项)。要牢记的是上述各量所在坐标系的关系,特别是${}^a\boldsymbol{\omega}^b$ 的定义。

只要把分量表达式代入,还可以说明对于任意并矢$\mathbb{D}$ 和矢量 $\boldsymbol{a}$,有

$$(\mathbb{D} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} = 0, \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \mathbb{D}) = 0 \qquad (附\ 5.9)$$

$$(\boldsymbol{a} \times \mathbb{D}) \cdot \boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{a} \times (\mathbb{D} \cdot \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \times \mathbb{D}) \cdot \boldsymbol{a} \qquad (附\ 5.10)$$

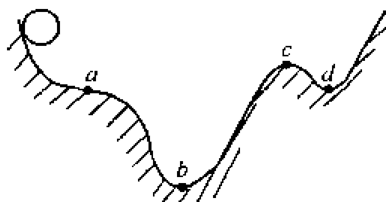
所以,以 $\boldsymbol{\omega}$ 左右点乘式(附 5.7),得

$$\dot{\mathbb{D}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \overset{\circ}{\mathbb{D}} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{D}) \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (附\ 5.11)$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbb{D}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbb{D} \times \boldsymbol{\omega}) \qquad (附\ 5.12)$$

附录 6　稳定性和劳斯 – 古尔维茨(Routh – Hurwitz) 准则

先以物理现象说明稳定性的定义。图附 6.1 是在凸凹不平地面上的小球，a、b、c、d 四个点都是它的静态平衡点，在不受外力时，小球在这四个点都能平衡不动。然而，若受到足够小的扰动时，a、c 两点的小球会转向它处不再返回，称这两点是不稳定的平衡点；相反地，b、d 两点的小球却在干扰消失后，逐渐返回原位，称这两点是稳定的平衡点。当然干扰很大时，b、d 两点的小球也会到别处平衡，但这处于大干扰下的平衡已不是我们研究的范围。



图附 6.1　小球的平衡点

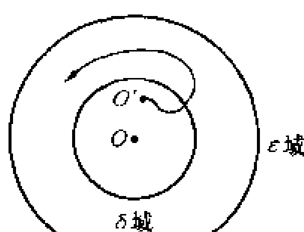
把平衡的概念扩大到动力学系统。设系统的状态为 $\underline{x} \in R^n$，状态方程式是

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \qquad \text{(附 6.1)}$$

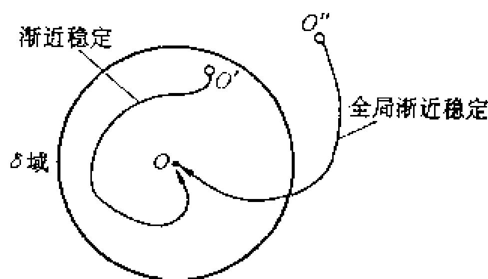
其平衡态是 $\dot{\underline{x}} = 0$，并从式(附 6.1) 中求得 $\underline{x} = \underline{x}_p$。不失一般性地可以认为 $\underline{x}_p = 0$，否则只要假设一组新状态变量 $\underline{z} = \underline{x}_p - \underline{x}$，代入式(附 6.1)，其平衡态就是 $\underline{z} = 0$ 了，称为零平衡状态。

本节研究系统对于零平衡状态的稳定性。包括：

(1) 李亚普诺夫(Lyapunov) 意义下的稳定。在图附 6.2(a) 中，O 点是平衡点，若系统受到小扰动，处于 O' 点。若对于任意的 $\epsilon > 0$ 邻域都能找到一正 δ，当 $\|\underline{x}(0)\| < \delta$ 时，对于一切 $t \geqslant 0$ 都有 $\|\underline{x}(t)\| < \epsilon$，则称系统是 Lyapunov 稳定的(见图附 6.2(a))。其中 $\|(\cdot)\|$ 是状态变量的任何一种模，如 $\|\underline{x}(t)\| = [x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t)]^{1/2}$ 等。图附 6.2(a) 中表示的系统状态从 δ 域出发一直都不超过 ϵ 域。



(a)



(b)

图附 6.2　稳定的定义

(2) 渐近稳定。当 $\|\underline{x}(0)\| < \delta$ 时，对于一切 $t \geqslant 0$ 都有 $\|\underline{x}(t)\|$ 趋近于零平衡点，见图附 6.2(b)。与前者的差别是，从 δ 域任一点出发的状态模的轨迹最终地趋近于零平衡点。

(3) 全局渐近稳定。当 $\|\underline{x}(0)\|$ 为任意值时，对于一切 $t \geqslant 0$ 总有 $\|\underline{x}(t)\|$ 趋近于零平衡点，见图附 6.2(b)。

对于非线性系统,有时不止有一个平衡点,所以全局渐近稳定特性就尤为重要,因为可以保证无论从哪个初始点出发,都将达到同一归宿。

对于线性系统,渐近稳定和全局渐近稳定是一致的,要用劳斯-古尔维茨法则判断,法则如下。

如果某一线性系统的特征方程式为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{附 6.2}$$

系统渐近稳定的必要条件是

ⅰ) $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 的符号相同,本书约定为正号; (附 6.3)

ⅱ) $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 均不为零 (附 6.4)

不满足这两条件的系统必不稳定。

系统渐近稳定的充分且必要的条件应通过下述过程判断。

第一步,将系统特征方程系数按如下方式排成两行

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4}\cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5}\cdots \end{matrix}$$

第二步,列写劳斯计算表。以 6 阶系统为例计算顺序如下

$$\begin{array}{c|cccc}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^4 & \dfrac{a_5a_4 - a_6a_3}{a_5} = A & \dfrac{a_5a_2 - a_6a_1}{a_5} = B & \dfrac{a_5a_0 - a_6 \cdot 0}{a_5} = a_0 & 0 \\
s^3 & \dfrac{Aa_3 - Ba_5}{A} = C & \dfrac{Aa_1 - a_5a_0}{A} = D & \dfrac{A \cdot 0 - a_5 \cdot 0}{A} = 0 & 0 \\
s^2 & \dfrac{CB - AD}{C} = E & \dfrac{Ca_0 - A \cdot 0}{C} = a_0 & 0 & 0 \\
s^1 & \dfrac{ED - Ca_0}{E} = F & \dfrac{E \cdot 0 - C \cdot 0}{E} = 0 & 0 & 0 \\
s^0 & a_0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

对于高于 6 阶的特征方程式,其计算可类推。

第三步,如上表第一列的元素(即 $a_6, a_5, A, C, E, F, a_0$)均为正,则系统稳定(特征方程的根均在[$s$]平面的左半部);如果其中有负值,则自上至下的顺序计数、符号改变的次数,即为特征方程在[s]平面右侧根的数目。

特殊地,对于二阶特征方程式

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{附 6.5}$$

系统渐近稳定的充要条件是

$$a_2 > 0, a_1 > 0 \text{和} a_0 > 0 \tag{附 6.6}$$

附录 7　古尔维茨(Hurwitz)稳定性判断准则

如果某一线性系统的特征方程式为式(附 6.2),其渐近稳定的充分和必要的条件是,从下述 $n \times n$ 维系数排列表格

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a_0 \end{bmatrix} = \underline{D}$$

中取出的各阶古尔维茨行列式 $\Delta_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 均为正。这里

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \det(\underline{D})$$

即是以主对角线为基础,在 D 中取第一行一列,前两行两列,前三行三列,…,全部 n 行 n 列构成方阵的元素,所形成的行列式。

假如把 a_n 变换为1(以 a_n 遍除式(附6.2)各项),并考虑到 $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,n-1)$,古尔维茨准则还可总结为

系统阶数	稳定准则
$n = 2$	$a_1, a_0 > 0$
$n = 3$	$a_2, a_0, \Delta_2 > 0$ 或 $a_1, a_0, \Delta_2 > 0$
$n = 4$	$a_3, a_2, a_0, \Delta_3 > 0$ 或 $a_3, a_1, a_0, \Delta_3 > 0$
$n = 5$	$a_4, a_2, a_0, \Delta_2, \Delta_4 > 0$ 或 $a_3, a_1, a_0, \Delta_2, \Delta_4 > 0$
$n = 6$	$a_5, a_4, a_2, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$ 或 $a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$
$n = 7$	$a_6, a_4, a_2, a_0, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 > 0$ 或 $a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 > 0$
$n = 8$	$a_7, a_6, a_4, a_2, a_0, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7 > 0$ 或 $a_7, a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7 > 0$

附录 8　李亚普诺夫(Lyapunov)稳定性定理(第二定理)

如果对于式(附 6.1)的零平衡状态,能够找到满足下列条件且有连续一阶偏导数的连续函数 $v(\underline{x},t)$,则系统在原点的平衡态是渐近稳定的。

(1) $v(\underline{x},t)$ 是正定的。

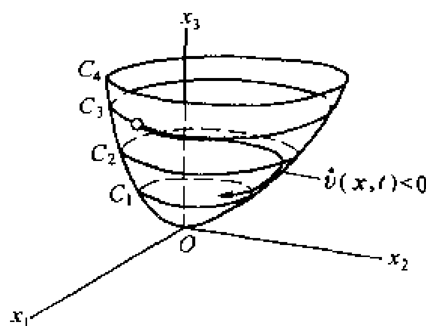
(2) $\dot{v}(\underline{x},t)$ 是负定的。

如(2)条件改为 $\dot{v}(\underline{x},t)$ 是半负定的,则系统在原点的平衡态是 Lyapunov 稳定的。如果还有

(3) $\|\underline{x}\|$ 趋近于无穷时,$\dot{v}(\underline{x},t)$ 也趋近于无穷。

(4) $\underline{x}=0$ 以外的点,$\dot{v}(\underline{x},t)$ 不恒为零,则系统是全局渐近稳定的。

这个定理的直观解释是:由于 $v(\underline{x})$ 是正定和连续的,所以 $v(\underline{x})=C$ 为常数,是一多维的空面闭曲线,在原点 $\underline{x}=0$ 处 $C=0$,远离原点 $v(\underline{x})$ 将连续变化,离原点越远,$v(\underline{x})$ 值也越大(图附 8.1 是 $\underline{x}=(x_1\ x_2\ x_3)^{\mathrm{T}}$ 三维空间的情况)。条件(2)表示,$v(\underline{x})$ 随时间逐渐变小,在图附 8.1 中则是逐渐下降的,这说明解曲线是逐渐接近原点,并最终到达原点。条件(3)和(4)除去了原点以外出现平衡点的可能性。



图附 8.1　李亚普诺夫稳定性定理解释

附录 9　几个常用的运动稳定性定理

空间飞行器姿态动力学的基本方程式是刚体绕固定点旋转的欧拉方程，考虑到空间飞行器的不同结构型式和阻尼器及控制执行机构的特点后，能形成几种不同类型的动力学方程，本节就是研究它们的稳定性问题的，部分资料。

本书所遇到的姿态动力学方程式的一般形式是

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + (\underline{D} + \underline{G})\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0} \tag{附 9.1}$$

这里，$\underline{M}^{T} = \underline{M} > 0, \underline{D}^{T} = \underline{D} \not< 0, \underline{G}^{T} = -\underline{G}, \underline{K}^{T} = \underline{K}$，它们都是 $n \times n$ 维的矩阵，或写为 $\in R^{n\times n}$。其中 $\underline{M}$ 是质量(转动惯量)阵，$\underline{D}$ 是阻尼阵，$\underline{G}$ 是反映陀螺效应的反对称矩阵，$\underline{K}$ 是刚度阵，$\underline{x} \in R^{n}$ 是状态变量。

如果有 $\underline{K} > 0$，称系统是**静稳定的**，若 $\underline{D} > 0$，则称系统是**完全阻尼的**，否则便是**静不稳定**或**不完全阻尼的**。

对于式(附 9.1)的各种不同情况，有下述稳定性定理。首先，如果方程式中只有首项，即 $\underline{M}\ddot{\underline{x}} = 0$，将有解 $\underline{x} = \underline{a}t + \underline{b}$。显然，它是随时间增大的，系统不稳定。所以有如下定理。

定理 9.1　系统 $\underline{M}\ddot{\underline{x}} = 0, \underline{M}^{T} = \underline{M} > 0, \underline{M} \in R^{n\times n}, \underline{x} \in R^{n}$ 是不稳定的。

如果系统方程式形如

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0} \tag{附 9.2}$$

其中，$\underline{M}^{T} = \underline{M} > 0, \underline{K}^{T} = \underline{K}, \underline{M}, \underline{K} \in R^{n\times n}, \underline{x} \in \underline{R}^{n}$，则有如下定理。

定理 9.2　式(附 9.2)表示的系统，当且仅当 $\underline{K} > 0$(静稳定的)才是稳定的。

证　若取 Lyapunov 函数为动能和势能之和

$$v = \frac{1}{2}(\dot{\underline{x}}^{T}\underline{M}\dot{\underline{x}} + \underline{x}^{T}\underline{K}\underline{x}) \tag{附 9.3}$$

考虑到 $\underline{M}$ 和 $\underline{K}$ 是对称的，因此有

$$\dot{v} = \dot{\underline{x}}^{T}(\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x})$$

把式(附 9.2)代入，得 $\dot{v} = 0$，这是 Lyapunov 稳定的标志。根据附录 8，Lyapunov 函数 v 必须是正定的，这就要求式(附 9.3)中的两个二次型都是正定的。已有 $\underline{M} > 0$，第一个二次型是正定的，还必须 $\underline{K} > 0$，v 才是正定的。

证毕

事实上，因 $\underline{M} > 0$，可以分解为 $\underline{M} = \underline{T}^{T}\underline{T}, \underline{T} \in R^{n\times n}$，$\underline{T}$ 还应是有逆的，并假设 $\underline{T}^{-1} = \underline{P}$。若令 $\underline{T}\underline{x} = \underline{q}$，因此有 $\underline{x} = \underline{T}^{-1}\underline{q} = \underline{P}\underline{q}$。把上述关系代入式(附 9.2)，再右乘$(\underline{T}^{-1})^{T} = \underline{P}^{T}$，得

$$\ddot{\underline{q}} + \underline{P}^{T}\underline{K}\underline{P}\underline{q} = \underline{0} \tag{附 9.4}$$

若令 $\underline{B} = \underline{P}^{T}\underline{K}\underline{P} \in R^{n\times n}$，如果 $\underline{K} > 0$，必然有 $\underline{B} > 0$。易知，应有 $\underline{Q}^{T} = \underline{Q}^{-1} \in R^{n\times n}$ 的正交阵，使对 $\underline{B}$ 的正交变换 $\underline{Q}^{T}\underline{B}\underline{Q} = \underline{\Lambda}$ 成立。其中 $\underline{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)$，是由 n 个特征值

$\lambda_j(j = 1,2,\cdots,n)$，组成的对角阵。因此令 $\underline{q} = \underline{Q}\,\underline{\eta}$，$\underline{\eta} \in R^n$，代入上式，再右乘 $\underline{Q}^{\mathrm{T}}$，考虑到 $\underline{Q}^{\mathrm{T}}\underline{Q} = \underline{Q}^{-1}\underline{Q} = \underline{E}_n$，有

$$\ddot{\underline{\eta}} + \underline{\Lambda}\,\underline{\eta} = 0 \tag{附 9.5}$$

只当 $\lambda_j > 0$ 时，式(附9.5)的解才是稳定的。也就是要求 $\underline{\Lambda} > 0$，而这只当 $\underline{K} > 0$ 才有可能。于是再次得到上面的结论。如果某一 $\lambda_j = 0$，因有与时间 t 成正比增长的解，系统将不稳定；若某一 $\lambda_i < 0$，将出现按指数增长的解，系统也是不稳定的。

引理 1　当 $\lambda\underline{M}\,\underline{u} = \underline{G}\,\underline{u}$ 时，若 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0$，$\underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}$，$\underline{M}, \underline{G} \in R^{n\times n}$，$\underline{u} \in R^n$，其特征值是共轭虚数，即实部为零的共轭复数。

证　设特征值是共轭复数 λ 和 λ^*，它们对应的特征矢量为 $\underline{u}$ 和 $\underline{u}^*$，因此有

$$\lambda\underline{M}\,\underline{u} = \underline{G}\,\underline{u},\quad \lambda^*\underline{M}\,\underline{u}^* = \underline{G}\,\underline{u}^*$$

若以 $\underline{u}^H = \underline{u}^{*\mathrm{T}}$ 表示 $\underline{u}$ 的共轭转置，可以写出

$$\underline{u}^H\underline{M}\,\underline{u} = (\underline{M}\,\underline{u}^*)^{\mathrm{T}}\underline{u} = \left(\frac{\underline{G}\,\underline{u}^*}{\lambda^*}\right)^{\mathrm{T}}\underline{u} = -\frac{\underline{u}^H\underline{G}\,\underline{u}}{\lambda^*} = -\frac{\lambda}{\lambda^*}\underline{u}^H\underline{M}\,\underline{u}$$

显然，必有 $\lambda^* = -\lambda$，说明它们是实部为零的共轭复数，即共轭虚数。　　证毕

推论 1　引理 1 中，若 $n = 2k + 1$，$k = 0,1,\cdots$ 则至少有一个特征值为零。

这是因为共轭特征值都成对出现，多余的只能是零。

当系统具有陀螺效应时，方程式成为

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{G}\,\dot{\underline{x}} = \underline{0} \tag{附 9.6}$$

$\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0$，$\underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}$，$\underline{M}, \underline{G} \in R^{n\times n}$，$\underline{x} \in R^n$。在给出适合这类方程式的稳定定理之前，先研究这类方程式的特点。

如取式(附9.6)的解为 $\underline{x} = \underline{u}e^{\lambda t}$，代入后得 $\lambda\underline{M}\,\underline{u} + \underline{G}\,\underline{u} = 0$，恰是引理 1 的特征值问题。因此，设某共轭虚数特征值是 $\mathrm{i}\omega_r$ 和 $-\mathrm{i}\omega_r$，对应的特征矢量为 $\underline{u}_r$ 和 $\underline{u}_r^*$，它们是共轭复数，设有

$$\underline{u}_r = \underline{y}_r + \mathrm{i}\underline{z}_r,\ \underline{u}_r^* = \underline{y}_r - \mathrm{i}\underline{z}_r$$

上面的 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，$\underline{u}_r, \underline{y}_r, \underline{z}_r \in R^n$。先求出特征值和特征矢量之间的关系——正交条件。显然它们满足

$$\mathrm{i}\omega_r\underline{M}(\underline{y}_r + \mathrm{i}\underline{z}_r) + \underline{G}(\underline{y}_r + \mathrm{i}\underline{z}_r) = \underline{0},\ r = 1,2,\cdots,n/2$$

$$-\mathrm{i}\omega_r\underline{M}(\underline{y}_r - \mathrm{i}\underline{z}_r) + \underline{G}(\underline{y}_r - \mathrm{i}\underline{z}_r) = \underline{0},\ r = 1,2,\cdots,n/2$$

应注意，r 是从 1 增到 $\frac{n}{2}$ 的，而上面两式加起来刚好有 n 个，这是由方程的维数限定的。当 n 为奇数时，上述写法将出现困难，这时推论 1 成立。将上两式进行虚实部分开，可以求得

$$\omega_r\underline{M}\,\underline{y}_r + \underline{G}\,\underline{z}_r = \underline{0},\ r = 1,2,\cdots,n/2 \tag{附 9.7}$$

$$-\omega_r\underline{M}\,\underline{z}_r + \underline{G}\,\underline{y}_r = \underline{0},\ r = 1,2,\cdots,n/2 \tag{附 9.8}$$

式(附9.7)左乘 $\underline{y}_k^{\mathrm{T}}$，再对 $r = k$ 汛出式(附9.8)，转置后右乘 $\underline{z}_r$；式(附9.8)左乘 $\underline{z}_k^{\mathrm{T}}$，再对

$r = k$ 写出式(附 9.7),转置后右乘 y_r。这样处理后,共得 4 个表达式

$$\omega_r y_k^T M y_r + y_k^T G z_r = 0, r, k = 1,2,\cdots,n/2 \quad (附 9.9)$$

$$-\omega_k z_k^T M z_r - y_k^T G z_r = 0, r, k = 1,2,\cdots,n/2 \quad (附 9.10)$$

$$-\omega_r z_k^T M z_r + z_k^T G y_r = 0, r, k = 1,2,\cdots,n/2 \quad (附 9.11)$$

$$\omega_k y_k^T M y_r - z_k^T G y_r = 0, r, k = 1,2,\cdots,n/2 \quad (附 9.12)$$

式(附 9.9)减式(附 9.12),式(附 9.10)减式(附 9.11),所得结果相加,得

$$(\omega_r - \omega_k)(y^T M y_r + z_k^T M z_r) = 0 \quad (附 9.13)$$

此式为零的条件是

$$y_k^T M y_r = z_k^T M z_r = 0, 当 r \neq k 时 \quad (附 9.14)$$

$$y_k^T M y_r = z_k^T M z_r = 1, 当 r = k 时 \quad (附 9.15)$$

把式(附 9.14)和式(附 9.15)代回式(附 9.9) ~ 式(附 9.12)还可求得

$$y_k^T G z_r = z_k^T G y_r = 0, 当 r \neq k 时 \quad (附 9.16)$$

$$y_k^T G z_r = -z_k^T G y_r = -\omega_r, 当 r = k 时 \quad (附 9.17)$$

式(附 9.13) ~ 式(附 9.17)中的 $r, k = 1,2,\cdots,n/2$。

利用类似的方法,还可求得

$$(\omega_r + \omega_k)(z_k^T M y_r + y_k^T M z_r) = 0 \quad (附 9.18)$$

并从而导出

$$z_k^T M y_r = y_k^T M z_r = 0, r, k = 1,2,\cdots,n/2 \quad (附 9.19)$$

$$y_k^T G y_r = z_k^T G z_r = 0, r, k = 1,2,\cdots,n/2 \quad (附 9.20)$$

称式(附 9.14 ~ 17)和式(附 9.19)、式(附 9.20)为特征矢量的正交条件,如果定义特征矢量阵 U 为

$$U = [y_1\ z_1\ y_2\ z_2 \cdots y_{n/2}\ z_{n/2}] \in R^{n\times n} \quad (附 9.21)$$

正交条件还可以写成紧凑的形式

$$U^T M U = E_n \quad (附 9.22)$$

$$U^T G U = \mathrm{diag}(s_1\ s_2 \cdots s_{n/2}) \quad (附 9.23)$$

其中,E_n 是 $n \times n$ 维单位阵,而

$$s_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix} \quad (附 9.24)$$

利用 U 矩阵和正交条件还可以把式(附 9.6)解耦,为此取变换

$$X = U\eta \quad (附 9.25)$$

其中,$\eta \in R^n$ 是新的变量。把式(附 9.25)代入式(附 9.6),再左乘 U^T,考虑到式(附 9.22)和式(附 9.23),得

$$\ddot{\eta} + \mathrm{diag}(s_1\ s_2 \cdots s_{n/2})\dot{\eta} = 0 \quad (附 9.26)$$

不失一般性地，从式(附 9.26) 中取出对应于 $\underline{s}_1$ 的两维方程式

$$\ddot{\eta}_1 - \omega_1\eta_2 = 0, \ddot{\eta}_2 + \omega_1\eta_1 = 0$$

它们的解是

$$\eta_1 = a\sin\omega_1 t + b\cos\omega_1 t$$

$$\eta_2 = c\sin\omega_1 t + d\cos\omega_1 t$$

其中，a, b, c, d 是由初始条件决定的积分常数。上两式表明：如果 $s_1, s_2, \cdots, s_{n/2}$ 均不是零矩阵，则系统(即式(附 9.6))是 Lyapunov 稳定的。换言之 $\underline{G}$ 的秩为 n 维，系统就是稳定的。于是有如下定理。

定理 9.3 系统 $\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{G}\dot{\underline{x}} = 0, \underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}, \underline{M}, \underline{G} \in R^{n\times n}, \underline{x} \in R^n$，当且仅当 $\mathrm{rank}\underline{G} = n$ 时才是稳定的。

如果系统不包含 $\underline{G}$ 项，式(附 9.1) 成为有阻尼的系统

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{D}\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0} \quad (附 9.27)$$

$\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}, \underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n\times n}, \underline{x} \in R^n$，则有如下定理

定理 9.4 如果系统式(附 9.27) 有 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}, \underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n\times n}$，它是静稳定(即 $\underline{K} > 0$) 和完全阻尼(即 $\underline{D} > 0$) 时，系统是渐近稳定的。

证 仍然取式(附 9.3) 为 Lyapunov 函数，仿照前面的作法，可以求得

$$\dot{\underline{v}} = -\dot{\underline{x}}^{\mathrm{T}}\underline{D}\dot{\underline{x}}$$

可见，只有 $\underline{D} > 0$，才有上式为负，系统为渐近稳定。然而，在取式(附 9.3) 为 Luapunov 函数时，就已包括了 $\underline{K} > 0$ 的要求(附录 8 第 1 条)($\underline{M}$ 已是大于零的)。 证毕

要求 $\underline{D} > 0$ 和 $\underline{K} > 0$，往往不能被完全满足。然而，不完全满足这个要求的系统，有时也是稳定的，因而定理 9.4 只是系统稳定的充分条件。而关于系统式(附 9.27) 稳定性的另一定理，可以叙述为如下。

定理 9.5 如果系统式(附 9.27) 有 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}, \underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n\times n}$，当且仅当 $\underline{D} \nless 0$ 和

$$\mathrm{rank}[\underline{D}\;\underline{K}\underline{M}^{-1}\underline{D}(\underline{K}\underline{M}^{-1})^2\underline{D} \quad \cdots \quad (\underline{K}\underline{M}^{-1})^{n-1}\underline{D}] = n \quad (附 9.28)$$

才是渐近稳定的。

证略，有兴趣者可以参阅文献[28]

假如 $\underline{D} = 0$，式(附 9.1) 是陀螺特性的保守系统

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{G}\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0} \quad (附 9.29)$$

这时我们有如下的稳定定理。

定理 9.6 如果系统式(附 9.29) 有 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}, \underline{M}, \underline{G}, \underline{K} \in R^{n\times n}$，则当 $\underline{K} > 0$(静稳定) 时系统是稳定的。

证 若取式(附 9.3) 为 Lyapunov 函数，考虑到式(附 9.29)，有

$$\dot{v} = \dot{\underline{x}}^{\mathrm{T}}(\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x}) = -\dot{\underline{x}}\,\underline{G}\dot{\underline{x}} \quad (附 9.30)$$

由于 $\underset{\sim}{G}^{\mathrm{T}} = -\underset{\sim}{G}$，所以有 $\dot{v} = 0$。

这就说明系统式(附 9.29) 稳定时，将是 Lyapunov 稳定的。

事实上，定理 9.6 只是式(附 9.29) 稳定的充分条件，满足此定理的系统是稳定的，不满足它的条件时并不一定都不稳定。但它的形式简单，便于应用。下面通过一个简单例子说明附 9.6 定理的充分性。

例　取二维系统[29]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{附 9.31}$$

它的特征多项式是

$$s^4 + (k_1 + k_2 + g^2)s_2 + k_1k_2 = 0 \tag{附 9.32}$$

如果把它写成

$$s^4 + b_1s^2 + b_0 = 0 \tag{附 9.33}$$

则系统的稳定条件是

$$b_1 > 0, b_0 > 0, b_1^2 - 4b_0 > 0 \tag{附 9.34}$$

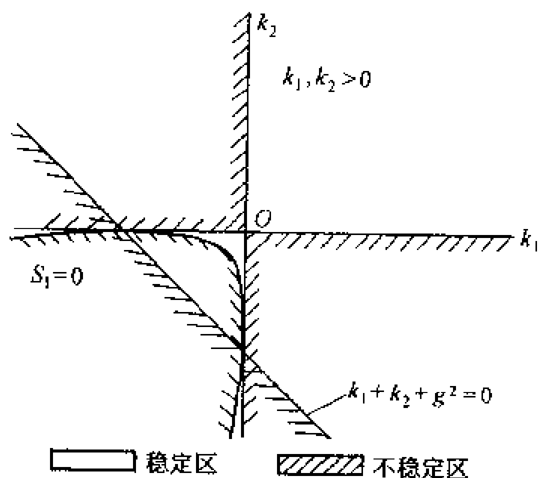
用式(附 9.32) 中的参数，稳定条件成为

$$b_1 = k_1 + k_2 + g^2 > 0 \tag{9.35a}$$

$$b_2 = k_1k_2 > 0 \tag{9.35b}$$

$$s_1 = (k_1 - k_2)^2 + 2g(k_1 + k_2) + g^4 > 0 \tag{9.35c}$$

如取 k_1 和 k_2 分别为横轴和纵轴，则式(附 9.35) 的稳定条件可绘成如图附 9.1 所示的区域。其中 $k_1 + k_2 + g^2 = 0$ 是一条 $-45°$ 的斜直线，其上方为稳定区；$k_ik_2 > 0$ 表示第一和三象限是稳定区；$s_1 = 0$ 是在第三象限的抛物线与横及纵坐标的切点恰是斜直线与坐标轴交点，其上侧是稳定区域。综合起来，稳定区域是第一象限和第三象限靠近原点位于抛物线上方的接近三角形的区域。



图附 9.1　例题的稳定和非稳定域的划分

但如果使用定理附 9.5,它给出的稳定条件是 $\underline{K} > 0$,对于本例是

$$k_1 > 0, k_2 > 0 \tag{附 9.36}$$

它只认定图附 9.1 中的第一象限为稳定参数区,而未将第三象限中的区域包含在内。这就说明了定理 9.6 只给出了稳定的充分条件。

应用 Sturm 定理[29],给出了式(附 9.29)系统的稳定充分和必要条件,并给出了对二维和三维系统的稳定参数关系式,这就是

定理 9.7　对于系统式(附 9.29),若 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0$, $\underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}$, $\underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}$,而 $\underline{M}, \underline{K}, \underline{G} \in R^{n \times n}$,当且仅当

$$V(-\infty) = n \tag{附 9.37}$$

$$V(0) = 0 \tag{附 9.38}$$

时才是稳定的。

其中 $V(\mu)$ 是下式

$$\{f_n(\mu), f'_n(\mu), r_1(\mu), \cdots r_\nu(\mu)\} \tag{附 9.39}$$

各项自左到右符号变化的次数,而 $f_n(\mu)$ 是式(附 9.29)的特征方程式 $\det(s^2\underline{M} + s\underline{G} + \underline{K})$,以 μ 代替 s^2 的结果

$$f_n(\mu) = \det(\mu\underline{M} + \sqrt{\mu}\underline{G} + \underline{K}) \tag{附 9.40}$$

$f'_n(\mu)$ 是 $f_n(\mu)$ 对于 μ 的导数,即 $f'_n(\mu) = df_n(\mu)/d\mu$, $-r_1(\mu)$ 是 $f_n(\mu)/f'_n(\mu)$ 的余数, $-r_2(\mu)$ 是 $f'_n(\mu)/r_1(\mu)$ 的余数,… 而 $-r_\nu(\mu)$ 是 $r_{\nu-2}(\mu)/r_{\nu-1}(\mu)$ 的余数。式中 ν 是式(附 9.39)前后相邻两项相除后,余数不含 μ 值时 $r_i(\mu)$ 项的数目(ν)。

应用定理 9.7 导出的式(附 9.29)所表示系统稳定性准则[29],见表附 9.1。

表附 9.1　陀螺保守系统的稳定准则

n	$f_n(\mu)$	稳定准则
2	$b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0$	$(b_2 > 0)$ $b_1, b_0, s_1 > 0$ $s_1 = b_1^2 - 4b_0b_2$
3	$b_3\mu^3 + b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0$	$(b_3 > 0)$　$b_1, b_0, s_2, s_3, s_4 > 0$ $s_2 = b_1b_2 - 9b_0b_3$ $s_3 = b_2^2 - 3b_1b_3$ $s_4 = b_1^2b_2^2 - 4b_2^3b_0 - 4b_3b_1^3 - 27b_0^2b_3^2 + 18b_0b_1b_2b_3$[注]
		$(b_3 > 0)$　$b_0, b_2, s_3, s_4, s_5 > 0$ $s_5 = b_1b_2^2 - 4b_1^2b_3 + 3b_0b_1b_3$
		$(b_3 > 0)$　$b_0, b_1, b_2, s_4 > 0$

注　原文献[29]中为 $-4b_3b_1^2$

表中给出了二维和三维系统(特征方程式为 4 和 6 阶)的结果。对于三维系统,列出了

三位不同作者得到的三种结果,第一种是直接由上述定理得出的,第二和三种分别由文献[30]和[31]给出的,它们都是等价的。Golla 还证明了 $s_3 > 0$ 是多余的,因此第三种准则最简便,易于使用。

如果在式(附 9.29)的基础上再增加阻尼项,就是在姿态动力学中常用的一般方程式(附 9.1)了。对于它的稳定性有如下的定理。

定理 9.8　对于系统式(附 9.1),若 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}$,且 $\underline{M}, \underline{G}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n\times n}$,则当 $\underline{D} > 0$ 和 $\underline{K} > 0$ 时系统是渐近稳定的。

证　仍取式(附 9.3)为 Lyapunov 函数,则有

$$\dot{\underline{v}} = \dot{\underline{x}}^{\mathrm{T}}(\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x}) = -\dot{\underline{x}}^{\mathrm{T}}(\underline{G} + \underline{D})\dot{\underline{x}} = -\dot{\underline{x}}^{\mathrm{T}}\underline{D}\dot{\underline{x}}$$

显然,上式要求 $\underline{D} > 0$,而在 Lyapunov 函数表达式中还要求 $\underline{K} > 0$。　证毕

定理 9.8 是式(附 9.1)系统稳定的充分条件。Hughes 和 Gardner[32] 考虑了必要条件后,得到如下的定理。

定理 9.9　如果系统式(附 9.1)有 $\underline{M}^{\mathrm{T}} = \underline{M} > 0, \underline{D}^{\mathrm{T}} = \underline{D}, \underline{G}^{\mathrm{T}} = -\underline{G}, \underline{K}^{\mathrm{T}} = \underline{K}$,如 $\underline{K} > 0$,但 $D \not< 0$。若

$$\mathrm{rank}[\underline{C}^{\mathrm{T}} \quad \underline{A}^{\mathrm{T}}\underline{C}^{\mathrm{T}} \quad (\underline{A}^{\mathrm{T}})^2\underline{C}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad (\underline{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\underline{C}^{\mathrm{T}}] = n \qquad (附 9.41)$$

则式(附 9.1)是渐近稳定的。

其中,$\underline{A} \in R^{2n\times 2n}, \underline{C} \in R^{n\times 2n}$,而

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{E} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}(\underline{D} + \underline{G}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = [\underline{0} \quad \underline{D}]$$

式中的 $\underline{E}$ 是 $n \times n$ 维单位阵。

定理的证明略。

参 考 文 献

1 В В Салмин. Оптимизация космических перелетов с малой мягой. Москва: Машиностроение, 1987

2 A E Bryson, Jr, Yu - Chi Ho. Applied Optimal Control. John Wiley and Sons, 1975

3 张光海.气动辅助变轨的研究:[学位论文].哈尔滨:哈尔滨工业大学,1991

4 威廉·汤姆逊.太空力学.俞乃喜译.台北:台北市徐氏基金会,1979

5 Е В Тарасов. Космонавтиква. Москва: Машиностроение, 1977

6 M H Kaplan. Modern Spacecraft Dynamics Control. John Wiley & Sons, 1976

7 Н М Иванов, А А Дмитриевский, Л Н Лысенко и др. Баллистика и навигация космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1986

8 В Н Кубасов, Г Ю Данков, Ю П Яблонько. Методы сближения на орбите. Моква: Машиностроение, 1985

9 Г С Титов. Полет космических аппаратов(Примеры и задачи). Моква: Машиностроение, 1980

10 关肇直,韩京清等编著.极值控制与极大值原理:现代控制系统理论小丛书.北京:科学出版社,1980

11 R S Dunning. The Orbital Mechanics of Flight Mechanics. NASA SP - 325, 1973

12 章仁为.静止卫星的轨道和姿态控制.北京:科学出版社,1987

13 任萱.人造卫星轨道动力学.长沙:国防科技大学出版社,1986

14 刘延柱.人造卫星动力学讲义.上海:上海交通大学出版社,1979

15 郑学塘.人造地球卫星的运动和预报.北京:科学出版社,1981

16 D Rex. Orbital Mechanics and Satellite Missions. Technische Universtat Braunschwerg, 1984.

17 Л Н Лысенко. Динамика наведения и основы управления сближения космических аппаратов, 1991

18 陈祖贵.自主交会对接最后接近阶段的控制技术.北京:北京控制工程研究所,1989

19 欧洲空间局.地球静止轨道手册.王正才等译.北京:国防工业出版社,1999

20 刘林.航天器轨道理论.北京:国防工业出版社,2000

21 刘林.天体力学方法.南京:南京大学出版社,1998

22 A C Vladimir. Orbital Mechanics. AIAA Inc, 1991

23 A A Deshkov, V V Ivashkin. On a History of the Luna - 9 Spacecraft Project for Soft Landing on the Moon. USSR Academy of Sciences, 1988

24 Yutaka Takano, Shigeaki Wada, Noriki Iwanaga. Study on Reference Trajectory for the Lunar

Lander. NASDA Tech Memorandum, 1996

25 竺苗龙.最佳轨道引论.北京:宇航出版社,1998

26 赵汉元.飞行器再入动力学与制导.长沙:国防科技大学出版社,1997

27 韩京清.线性系统理论代数基础.沈阳:辽宁科技出版社,1985

28 J A Walker, W E Schmitendorf. A Simple Test Asymptotic Stability in Partially Disipative Symmetric Systems. J. Appl. Mech, 1973, 40(4)

29 P C Hughes. Spacecraft Attitude Dynamics. John Wiley and Sons, 1986

30 R Longman, P Hagedorn, A Beck. Stabilization due to Gyroscopic Coupling in Dual. Spin Satellites Subject to Gravitationol Torques. Celestial Mech, 1981, 25

31 P C Hughes , D F Golla. Stability Diagrams for a Rigid Gyrostat in a Circular Orbit. University of Toronto Inst. for Aerospace Studies Tech, 1984

32 P C Hughes, L T Gardner. Asymptotic Stability of Linear Stationary Mechanica Systems. J. Appl. Mech. 1975, 41(7)

33 J P Moran. Effects of Plane Librations on the Orbital Motion of a Dumbell Soctellite. ARS J, 1961, 31

34 刘延柱.航天器姿态动力学.北京:国防工业出版社,1995

35 A C Vlodimir 著.航天器姿态动力学.刘良栋等译.北京:航空工业出版社,1992

36 黄圳圭编著.航天器姿态动力学.长沙:国防科技大学出版社,1997

37 金永德.空间飞行器姿态动力学与控制.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1991

38 T R Kane, P W Likins, D A Leuinson. Spacecraft Dynamics. McGraw-Hill Book Comp, 1983

39 Ю П Артюхин, Л И Каргу, В Л Симаев. Система управлеця КА стабцицзированных вращенцем. Москва: Наука, 1979